

15

Teorías métricas del campo electromagnético

Hasta el momento presente, la gravedad y el electromagnetismo son dos fenómenos distintos independientes, con diferencias físicas cualitativas. La teoría de la relatividad general elimina el concepto de fuerza y de acción a distancia instantánea, demostrando que la materia se mueve en una geometría de métrica cuadrimensional espacio-tiempo, siguiendo los cuerpos trayectorias que son las líneas geodésicas en dicho espacio.

La presencia de materia modifica la geometría del espacio-tiempo en la que se mueven otros cuerpos siguiendo sus líneas geodésicas. Sin embargo en las teorías del electromagnetismo, el concepto de fuerza (fuerza electrodinámica de Lorentz) se sigue manteniendo, por lo que el electromagnetismo tiene un carácter físico diferente de la gravitación. Comentaremos también, como el experimento de Wilson confirma las ecuaciones de la relatividad general aplicadas al electromagnetismo en sistemas no inerciales en rotación.

En este capítulo, comentaremos la teoría de Kaluza y Klein, quienes plantearon la posibilidad de eliminar el concepto de fuerza electrodinámica sugiriendo, en analogía con la gravitación, la posibilidad de que el potencial electromagnético A^α modificara la geometría del espacio tiempo. Para ello postularon la existencia de una cuarta dimensión adicional de tipo espacial, a través de la cual se manifiesta el electromagnetismo.

También comentaremos como se modificarían las ecuaciones del campo electromagnético, en el caso de que los fotones tuvieran masa, cuya posibilidad deja abierta la teoría cuántica de campos y veremos que, en este caso, la materia tal como la conocemos no existiría.

Campo gravitatorio clásico

De acuerdo con la ley de Newton, la gravedad viene descrita por un campo $\vec{G}$ definido por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi G \rho_g \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{G} = 0$$

siendo ρ_g la densidad de masa que es la fuente que genera el campo de gravitación, G es la constante universal de gravitación.

La densidad de fuerza $\vec{f}$ que actúa sobre otra densidad de masa ρ_g situada en el campo gravitatorio viene dada por

$$\vec{f} = \rho_g \vec{G}$$

Como divergencia del campo $\vec{G}$ es nula, puede derivarse este de una función potencial escalar

$$\vec{G} = -\vec{\nabla} \phi_g$$

que verifica entonces la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G \rho_g$$

Por el capítulo de teorías covariantes, sabemos que la densidad de masa al igual que la densidad de carga no es un invariante relativista, por lo que las anteriores fórmulas no son covariantes y habrá que modificarlas para que sean invariantes relativistas. Sin embargo, si en primera aproximación consideraremos el caso del límite no relativista con $v/c \rightarrow 0$, entonces las anteriores ecuaciones se pueden derivar por variaciones a partir de la densidad lagrangiana

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} \rho_g v^2}_{\text{materia libre}} \underbrace{- \rho_g \phi_g}_{\text{interacción g. m.}} \underbrace{- \frac{1}{8\pi G} |\vec{\nabla} \phi_g|^2}_{\text{campo g. libre}}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, tomando a las x^i como variables de campo para la variación, nos dan la ecuación de movimiento de Newton en un campo gravitatorio

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi_g$$

Tomando a ϕ_g como variable de campo para la variación, se obtiene la ecuación del potencial en función de una densidad de masa fuente como origen del campo gravitatorio

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G \rho_g(\vec{x}, t)$$

Obsérvese, que en el principio variacional, se integran la fuerza sobre la materia y el potencial creado por la masa, que según la teoría de Newton son conceptos separados. Además, el principio variacional hace una identificación implícita de la masa inercial con la masa gravitatoria. Todos los cuerpos sometidos a un campo gravitatorio sufren la misma aceleración. Por tanto, la teoría variacional, contiene mucha más información que la simple formulación vectorial de las ecuaciones de Newton.

Se puede aplicar todo lo expuesto en el capítulo de teorías invariantes y vemos que, al no depender la lagrangiana explícitamente del tiempo, la energía se deberá conservar. Además, de la homogeneidad e isotropía del espacio, se desprende que se debe conservar el momento lineal y angular. Sin embargo, la anterior lagrangiana no es un invariante ante las transformaciones de Poincaré, por lo que se la debe modificar para ello.

La interacción gravitatoria actúa sobre todas la formas de masa-energía con la misma constante universal de acoplamiento α_G de forma atractiva y de largo alcance $\alpha_G = Gm_p^2/\hbar c = 10^{-38}$, donde G es la constante de gravitación universal de Newton, y m_p es la masa del protón que se toma como referencia. Por ello, es imposible aislar ningún sistema de la gravedad.

577

Potenciales escalares estáticos covariantes

Hemos visto en el capítulo de teorías covariantes que el cuadvivector de momento de de una partícula con masa en reposo m_0 , viene dado por

$$\mathcal{P} = m_0 \vec{U} = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{u}) = (mc, \vec{p}) = (E/c, \vec{p})$$

siendo el cuadvivector de velocidad

$$\vec{U} = \frac{d\vec{R}}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{u})$$

Si suponemos que la partícula se encuentra en un campo escalar ϕ_g de forma que existe un sistema inercial S_0 en que la energía total constante viene dada por

$$E = \mathcal{P}^0 c + m \phi_g = m_0 U^0 \left(c + \frac{\phi_g}{c} \right)$$

Los significados del campo electromagnético

Evidentemente en dicho sistema inercia S_0 deberá verificar la condición de potencial estático

$$\frac{\partial \phi_g}{\partial x^0} = 0$$

De la condición de invarianza de módulo del momento, se obtiene para este caso, la ecuación de momento energía

$$\bar{\mathcal{P}}^2 = \frac{1}{c^2} (E - m\phi_g)^2 - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$$

El cuadrivector de fuerza sobre una partícula vimos que viene dado por

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{d\bar{\mathcal{P}}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(m_0 \frac{d\bar{\mathcal{R}}}{d\tau} \right) = m_0 c \frac{d^2 \bar{\mathcal{U}}}{d\tau^2}$$

Para un sistema aislado, vimos que m_0 es constante, y además se verifica que

$$\bar{\mathcal{F}} \cdot \bar{\mathcal{U}} = 0$$

lo que implica que

$$\mathcal{F}^0 \mathcal{U}^0 = \gamma \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

El trabajo realizado por la fuerza será entonces

$$\int \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \int \frac{1}{\gamma} \mathcal{F}^0 \mathcal{U}^0 d\tau = \int \frac{d}{d\tau} (mc^2) d\tau = \Delta mc^2 = \Delta E - \Delta(m\phi_g)$$

La energía cinética E_c viene dada por la expresión

$$E_c = E - m\phi_g - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) - m\phi_g$$

Todo esto, es equivalente a considerar que el sistema está determinado por la lagrangiana de la partícula con la interacción del campo siguiente

$$L_{mg} = - \left(m_0 c + \frac{m_0}{c} \phi_g \right) \sqrt{\bar{\mathcal{U}}^2}$$

La variación de la acción vendrá dada por

$$\delta S = -\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(m_0 c + \frac{m_0}{c} \phi_g \right) \sqrt{\bar{\mathcal{U}}^2} dt = -\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} (mc^2 + m\phi_g) d\tau$$

siendo

$$ds = c d\tau = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c dt \sqrt{1 - u^2/c^2} = \gamma^{-1} c dt$$

Estas ecuaciones, nos dicen que la energía potencial escalar es equivalente un incremento de la masa de la partícula en una cantidad $m_0 \phi_g / c^2$, lo que está de acuerdo con la equivalencia energía y masa de Einstein.

Sin embargo, debe observarse que esta separación de energía cinética y potencial solo es posible para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, y que para velocidades grandes veremos que no es posible esta separación.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange, que nos determinan las ecuaciones de movimiento serán en este caso

$$\frac{\partial L_{mg}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L_{mg}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = -cm_0 \frac{\partial \phi_g}{\partial x^\alpha} + \frac{d}{d\tau} \left((m_0 c + \frac{m_0}{c} \phi_g) \frac{\dot{x}^\alpha}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = 0$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\mathcal{F}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d\tau} \left(m_0 \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \equiv cm_0 \frac{\partial \phi_g}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m_0}{c} \phi_g \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = cm_0 \frac{\partial \phi_g}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m_0}{c} \phi_g \dot{x}^\alpha \right)$$

Para un sistema cerrado en que m_0 es una constante, se verifica la condición de ortogonalidad entre los cuadvectores de fuerza $\vec{\mathcal{F}}$ y de velocidad $\vec{u}$

$$\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{u} = \mathcal{F}^\alpha u_\alpha = cm_0 \frac{\partial \phi_g}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m_0}{c} \phi_g \right) \dot{x}^\alpha u_\alpha - \frac{m_0}{c} \phi_g \dot{x}^\alpha \frac{d\dot{x}^\alpha}{d\tau} = 0$$

579

y por, tanto de la relación $\mathcal{F}^\alpha u_\alpha = \gamma^2 \vec{f} \cdot \vec{v}$ volvemos a obtener la ecuación de conservación de la energía

$$\int \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\tau} d\tau = \int \frac{1}{\gamma} \mathcal{F}^0 u_0 d\tau = \int \mathcal{F}^0 c d\tau = c \int (cm_0 \frac{\partial \phi_g}{\partial x^0} - \frac{d}{d\tau} (\gamma m_0 c \phi_g)) d\tau$$

Si existe un sistema inercial S_0 en que el potencial sea estacionario con $\partial_0 \phi_g = 0$, entonces, de la última ecuación y de la definición de $\mathcal{F}^\alpha$, se obtiene que

$$m_0 c^2 + m_0 \phi_g = C^{te}$$

Esta ecuación, la podemos reinterpretar para cualquier sistema inercial como la ecuación de conservación de la energía

$$E = mc^2 + m\phi_g = \frac{m_0 c^2 + m_0 \phi_g}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

La energía cinética E_c viene dada por la expresión

$$E_c = E - m\phi_g - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = mc^2 - m_0 c^2 = \Delta mc^2$$

Los significados del campo electromagnético

Al igual que en capítulo de teorías escalares, en este caso se puede establecer una analogía con el principio variacional de Jacobi y el de Fermat, si reemplazamos los integrandos de la acción a lo largo de una trayectoria por

$$S = \int_{P_1}^{P_2} m_0 c \left(1 + \frac{\phi_g}{c^2}\right) ds \quad \leftrightarrow \quad \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2m_0(E - V)} ds \quad \leftrightarrow \quad \int_{P_1}^{P_2} n ds$$

potencial escalar principio de Jacobi principio de Fermat

Si utilizamos coordenadas generalizadas de forma que ds este representado por una métrica de la forma

$$ds^2 = \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq_\alpha}{d\tau} d\tau$$

entonces la acción viene dada por

$$S = - \int_{P_1}^{P_2} \left(m_0 c + \frac{m_0}{c} \phi_g \right) \left(\frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq_\alpha}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde{L}_{mg} d\tau$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange para el movimiento

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dq^\alpha}{d\tau} \right)} \right) = \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial q^\alpha}$$

toman la expresión

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left(m_0 + \frac{m_0}{c^2} \phi_g \right) \frac{dq^i}{d\tau} \right) = \frac{m_0}{c^2} \frac{\partial \phi_g}{\partial q^i} \left(\frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq_\alpha}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}}$$

que se puede describir como

$$\frac{d}{ds} \left(\left(1 + \frac{1}{c^2} \phi_g \right) \frac{dq^i}{d\tau} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_g}{\partial q^i}$$

El hamiltoniano para una partícula sometida al potencial escalar toma la expresión

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}^\alpha \tilde{p}_\alpha}{2m_0 \left(1 + \frac{\phi_g}{c^2} \right)} = E$$

que nos vuelve a confirmar que $m_0 \phi_g / c^2$ actúa como un incremento de masa, y donde $\tilde{p}_\alpha$ el momento canónico conjugado

$$\tilde{p}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial q^\alpha}$$

Sin embargo, ds^2 en función de las coordenadas generalizadas no tiene porque estar representado por una forma métrica diagonal, y de manera general, puede adoptar una forma bilineal simétrica, que supondremos viene representada por

$$ds^2 = g_{M\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} d\tau$$

y donde τ es un parámetro arbitrario del se supone que dependen las coordenadas generalizadas, aunque habitualmente representará el tiempo propio a las lo largo de las trayectorias de movimiento. Por $g_{M\alpha\beta}$ se designa al tensor métrico del espacio plano de Minkowski representado en coordenadas cartesianas por la matriz

$$g_{M\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

En este caso, la acción vendrá definida por

$$S = -m_0 c \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(1 + \frac{1}{c^2} \phi_g \right) \sqrt{g_{M\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}} d\tau$$

Si llamamos

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \left(1 + \frac{1}{c^2} \phi_g \right)^2 g_{M\alpha\beta}$$

las ecuaciones de movimiento vendrán dadas haciendo nula la variación de la acción

$$\delta S = m_0 c \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}} d\tau = 0$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange adoptan la forma general

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}}} \tilde{g}_{\mu\beta} \frac{dq^\beta}{d\tau} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}}} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}$$

En el caso de una partícula libre en que $\phi_g = 0$, las trayectorias son las líneas geodésicas de energía constante definidas en un espacio de Riemann definido por la métrica

$$ds^2 = g_{M\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$$

La partícula se mueve entonces en una trayectoria que maximiza el tiempo propio. También se puede decir, que si el potencial escalar es distinto de cero, las trayectorias de movimiento siguen las curvas geodésicas de una partícula libre en un espacio con la métrica

$$ds^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = (1 + \phi_g/c^2)^2 g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$$

A $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ se le denomina habitualmente como el tensor métrico.

Este espacio en general no es riemanniano. Se dice que un espacio es de tipo Riemann, si en un entorno suficiente pequeño de cualquier punto del espacio, este se puede aproximar por un espacio plano euclídeo.

$$d\tilde{s}^2 = (1 + \phi_g/c^2)^2 g_{M\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = \tilde{g}_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \leftrightarrow d\tilde{s}^2 = g_{M\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$$

$$E = mc^2 + m\phi_g$$

Métrica en espacio no euclídeo

Métrica en espacio euclídeo

A la partícula en este nuevo este espacio, se le puede asociar una lagrangiana $\tilde{L}_{mg}$ que es semejante a la de una partícula libre

$$\tilde{L}_{mg} = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}} = (1 + \phi_g/c^2) \sqrt{g_{M\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}}$$

Los momentos canónicos asociados se definen como

$$\tilde{p}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial q^\alpha}$$

Debido a la condición de la constancia de la energía, no todo los $\tilde{p}_\alpha$ y q^α son independientes, por lo que el hamiltoniano que se construyese sobre ellos sería nulo, ya que sería

$$\tilde{p}_\alpha q^\alpha - \tilde{L}_{mg} \equiv 0$$

En este caso, de igual forma a como vimos en el capítulo de teorías covariantes, se puede construir el hamiltoniano mediante los multiplicadores de Lagrange empleando como restricción la ecuación de conservación de la energía. Un hamiltoniano que da las ecuaciones correctas de movimiento es

$$\tilde{H}_{mg} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta$$

donde $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ es la matriz inversa de $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, y donde los momentos $\tilde{p}_\alpha$ verifican la ecuación

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta = Em_0$$

Las ecuaciones de movimientos en este espacio riemanniano son las geodésicas, que vienen ahora representadas por las ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned}\frac{dq^\mu}{d\tau} &= \frac{\partial \tilde{H}_{mg}}{\partial \tilde{p}_\alpha} = 2\tilde{g}^{\mu\beta} \tilde{p}_\beta \\ \frac{d\tilde{p}_\mu}{d\tau} &= -\frac{\partial \tilde{H}_{mg}}{\partial q^\mu} = -\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta\end{aligned}$$

Geodésicas y fuerzas inerciales

Desarrollaremos ahora algunas formulas que nos serán útiles posteriormente

Como ya hemos visto la variación de

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} d\tilde{s} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}} d\tau = 0$$

nos lleva a las ecuaciones de Euler

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}}} \tilde{g}_{\mu\beta} \frac{dq^\beta}{d\tau} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}}} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = 0$$

583

Evidentemente estas ecuaciones representa las trayectorias para las que distancia $\tilde{s}$ entre dos puntos P_1 y P_2 del espacio es mínima, y por tanto, representan curvas geodésicas en dicho espacio.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d\tilde{s}}{d\tau} = \tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange para las geodésicas se pueden escribir como

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\frac{d\tilde{s}}{d\tau}} \tilde{g}_{\mu\beta} \frac{dq^\beta}{d\tau} \right) - \frac{1}{2\frac{d\tilde{s}}{d\tau}} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = 0$$

Desarrollando las derivadas obtenemos

$$\tilde{g}_{\beta\mu} \frac{d^2 q^\beta}{d\tau^2} + \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\mu}}{\partial q^\beta} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = \tilde{g}_{\alpha\mu} \frac{dq^\beta}{d\tau} \frac{d^2 \tilde{s}}{d\tau^2} / \frac{d\tilde{s}}{d\tau}$$

Puesto que $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\beta\alpha}$, el segundo término se puede descomponer como la suma de otros dos

$$\tilde{g}_{\beta\mu} \frac{d^2 q^\beta}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\mu}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \tilde{g}_{\beta\mu}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \right) \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = \tilde{g}_{\alpha\mu} \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{d^2 \tilde{s}}{d\tau^2} / \frac{d\tilde{s}}{d\tau}$$

Se definen los símbolos de Christoffel de primera y segunda especie como

$$[\alpha\beta, \tilde{\mu}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\mu}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \tilde{g}_{\beta\mu}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} \right)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \tilde{g}_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \tilde{g}^{\sigma\mu}$$

Las magnitudes con una tilde como $\tilde{\Gamma}$ están referidas al tensor métrico $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, y sin tilde al tensor sin perturbar $g_{\alpha\beta}$.

En función de estos símbolos, las ecuaciones para las geodésicas se pueden tomar la forma

$$\tilde{g}_{\beta\mu} \frac{d^2 q^\beta}{d\tau^2} + [\alpha\beta, \tilde{\mu}] \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = \tilde{g}_{\beta\mu} \frac{dq^\beta}{d\tau} \frac{d^2 \tilde{s}}{d\tau^2} / \frac{d\tilde{s}}{d\tau}$$

Si tomamos como parámetro para medir el arco de la curva $\tilde{s}$ el tiempo propio τ , será $d\tilde{s}/d\tau = 1$, y las ecuaciones se simplifican a

$$\tilde{g}_{\beta\mu} \frac{d^2 q^\beta}{d\tau^2} + [\alpha\beta, \tilde{\mu}] \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = 0$$

Si multiplicamos por $g^{\sigma\mu}$, la anterior ecuación para las trayectorias geodésicas adoptan también la expresión

$$\frac{d^2 q^\sigma}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = 0$$

que también podemos escribir como

$$\frac{d^2 q^\mu}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \frac{dq^\alpha}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} = 0$$

Por cada punto del espacio de Riemann pasa una única curva geodésica para cada dirección $\tilde{t}^\mu = dq^\mu/d\tilde{s}$ que es tangente a la trayectoria geodésica.

En un espacio plano, los símbolos de Christoffel son nulos $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu = 0$, y las curvas geodésicas son rectas, que representan a las curvas como menor distancia entre dos puntos.

Las curvas geodésicas tienen otras propiedades de interés.

La variación de vector tangente a lo largo de una curva geodésica viene dado por según la ecuación de la geodésica por

$$d\tilde{t}^\mu = -\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu t^\alpha dq^\beta$$

por lo que el vector tangente se desplaza paralelo a sí mismo a lo largo de la geodésica.

En analogía se define la operación de transporte de un campo vectorial contravariante $\mathcal{A}^\mu(q^\alpha)$ a un punto próximo $(q^\alpha + dq^\alpha)$ como el vector $\tilde{\mathcal{A}}^\mu(q^\alpha + dq^\alpha)$

$$\mathcal{A}^\mu(q^\alpha) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^\mu(q^\alpha + dq^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^\mu(q^\alpha) + \tilde{d}_c \mathcal{A}^\mu(q^\alpha) = \mathcal{A}^\mu(q^\alpha) - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{A}^\alpha dq^\beta$$

Se define la diferencial covariante de un campo vectorial contravariante $\mathcal{A}^\mu(q^\alpha)$ como

$$\tilde{d}_c \mathcal{A}^\mu(q^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^\mu(q^\alpha + dq^\alpha) - \tilde{\mathcal{A}}^\mu(q^\alpha + dq^\alpha) = \left(\frac{\partial \mathcal{A}^\mu}{\partial q^\beta} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{A}^\alpha \right) dq^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^\mu_{;\beta} dq^\beta$$

Se denomina derivada covariante del vector contravariante $\mathcal{A}^\mu(q^\alpha)$

$$\mathcal{A}^\mu_{;\beta} \equiv \frac{\tilde{d}_c \mathcal{A}^\mu}{dq^\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\mathcal{A}}^\mu(q^\alpha + dq^\alpha) - \mathcal{A}^\mu(q^\alpha + dq^\alpha)}{dq^\beta} = \frac{\partial \mathcal{A}^\mu}{\partial q^\beta} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{A}^\alpha = \mathcal{A}^\mu_{,\beta} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{A}^\alpha$$

La subida y bajada de índice se hace a través del tensor métrico $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ y de su inverso $\tilde{g}^{\alpha\beta}$. El covariante $\mathcal{A}_\mu$ se obtiene mediante

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu &= \tilde{g}_{\mu\alpha} \mathcal{A}^\alpha \\ \mathcal{A}^\mu &= \tilde{g}^{\mu\alpha} \mathcal{A}_\alpha \end{aligned}$$

Se define de igual forma la diferencial covariante de un vector contravariante como

$$\tilde{d}_c \mathcal{A}_\mu(q^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_\mu(q^\alpha + dq^\alpha) - \tilde{\mathcal{A}}_\mu(q^\alpha + dq^\alpha) = \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x^\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \mathcal{A}^\alpha \right) dq^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{\mu;\tilde{\alpha}} dq^\alpha$$

Una propiedad importante, es que la derivada covariante del tensor métrico es nula

$$\tilde{g}_{\alpha\beta;\tilde{\mu}} = \frac{\tilde{d}_c \tilde{g}_{\alpha\beta}}{dq^\mu} \equiv 0$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación de la geodésica se puede escribir como

$$\frac{\tilde{d}_c \tilde{t}^\mu}{ds} = 0$$

La ecuación para una partícula libre sobre la que no actúa ningún campo será entonces

$$\frac{d_c t^\mu}{ds} = 0$$

Por tanto, una partícula libre en un espacio de Minkowski $g_{\alpha\beta}$, se mueve a lo largo de las trayectorias en que la derivada covariante del vector tangente es nula, es decir para aquellas en que se desplaza paralelamente, y que corresponden además a aquellas en que se maximiza el tiempo propio transcurrido entre dos puntos de ella.

Cuando actúa un campo escalar débil, la partícula sigue también una geodésica similar a la una de una partícula libre en un espacio con la métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

Veremos que el principio de equivalencia establece una condición mas fuerte postulando que es el propio campo escalar el que crea distorsión física real del espacio tiempo con una métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

Una propiedad importante como veremos más adelante, es que la derivada covariante se transforma de forma tensorial ante un cambio de coordenadas. Esto avala el principio de equivalencia que implica que todos los sistemas acelerados deben ser considerados equivalentes a los sistemas inerciales, de forma que las leyes físicas sean indistinguibles entre ellos y adopten una forma covariante.

Toda la física del movimiento está contenida en el tensor métrico y sus primeras derivadas a través de los símbolos de Christoffel de una forma tensorial covariante.

Sin embargo, hay una serie de magnitudes fundamentales que dependen de los símbolos de Christoffel que determinan las ecuaciones generales del movimiento. Una de ellas es el tensor de curvatura. Se puede definir el tensor de curvatura a través de la derivada segunda covariante de un campo vectorial cualquiera como

$$\mathcal{A}^\mu{}_{;\tilde{\alpha};\tilde{\beta}} - \mathcal{A}^\mu{}_{;\tilde{\beta};\tilde{\alpha}} = \tilde{R}^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} \mathcal{A}^\sigma$$

siendo el tensor de curvatura

$$\tilde{R}^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} = \partial_\beta \tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha \tilde{\Gamma}^\mu_{\beta\sigma} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\beta} \tilde{\Gamma}^\rho_{\alpha\sigma} - \tilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\alpha} \tilde{\Gamma}^\rho_{\beta\sigma}$$

La condición necesaria y suficiente para que espacio sea un espacio plano de Minkowski es que todas las componentes del tensor de curvatura sean nulas.

El que exista un tensor de curvatura no nulo está relacionado con que la diferencial covariante $\tilde{d}_c \mathcal{A}^\mu$ no es una diferencial exacta, y por tanto la integral a lo largo de una curva cerrada no se anula, lo que significa también que el transporte paralelo de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada no vuelve a su estado inicial.

Sea $q^\alpha(\tilde{s}, \varpi)$ una familia 1-paramétrica de geodésicas donde ϖ es un parámetro que identifica la geodésica, y $\tilde{s}$ es el anterior parámetro a lo largo de la curva geodésica.

Un vector tangente a la geodésica en un punto de ella, viene dado por

$$\tilde{t}^\alpha(\tilde{s}, \varpi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \tilde{s}}(\tilde{s}, \varpi)$$

A lo largo de una geodésica se verifica entonces

$$\frac{\partial \tilde{t}^\alpha}{\partial \tilde{s}}(\tilde{s}, \varpi) = -\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma \tilde{t}^\alpha \tilde{t}^\beta(\tilde{s}, \varpi)$$

Sea $\tilde{l}^\alpha$ el vector de campo que describe la desviación entre dos geodésicas próximas con el mismo parámetro $\tilde{s}$

$$\tilde{l}^\alpha(\tilde{s}, \varpi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \varpi}(\tilde{s}, \varpi)$$

Se verifica entonces

$$\frac{d_c \tilde{l}^\mu}{d\tilde{s}} = \frac{\partial \tilde{l}^\mu}{\partial \tilde{s}} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \tilde{t}^\alpha \tilde{t}^\beta = \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \tilde{s}} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \tilde{t}^\alpha \tilde{t}^\beta = \frac{\partial \tilde{t}^\mu}{\partial \tilde{\omega}} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \tilde{t}^\alpha \tilde{t}^\beta$$

De igual forma, se demuestra que la derivada segunda covariante viene dada por

$$\frac{d_c^2 \tilde{l}^\mu}{d\tilde{s}^2} = \tilde{R}_{\sigma\alpha\beta}^\mu \frac{dq^\sigma}{d\tilde{s}} \frac{dq^\beta}{d\tilde{s}} \tilde{l}^\alpha$$

Si consideramos un observador que se mueve en una geodésica temporal, y próximo a él se observa una partícula que se mueve en su propia geodésica será $d\tilde{s} = cd\tau$, y

$$\frac{d^2 \tilde{l}^\mu}{d\tau^2}(\tilde{s}, \varpi) = c^2 \tilde{R}_{0\alpha 0}^\mu \tilde{l}^\alpha$$

En la aproximación de campo débil estacionario

$$\tilde{R}_{0\alpha 0}^\mu = \partial_0 \tilde{\Gamma}_{\alpha 0}^\mu - \partial_\alpha \tilde{\Gamma}_{00}^\mu + \tilde{\Gamma}_{\rho 0}^\mu \tilde{\Gamma}_{\alpha 0}^\rho - \tilde{\Gamma}_{\rho\alpha}^\mu \tilde{\Gamma}_{00}^\rho \approx -\partial_\alpha \tilde{\Gamma}_{00}^\mu$$

De la definición de los símbolos de Christoffel se deduce para un campo estacionario

$$\begin{aligned} [00, \tilde{\mu}] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial \tilde{g}_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial x^\mu} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial x^\mu} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\mu} \\ \tilde{\Gamma}_{00}^\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} [00, \mu] \tilde{g}^{\sigma\mu} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\mu} \tilde{g}^{\sigma\mu} \approx -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\mu} g^{\sigma\mu} \end{aligned}$$

y serán por tanto

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= 0 \\ \Gamma_{00}^i &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^i} \\ \tilde{R}_{0\alpha 0}^0 &= 0 \quad y \\ \tilde{R}_{0j0}^i &= -\partial_j \tilde{\Gamma}_{00}^i = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial x^i \partial x^j}\end{aligned}$$

con lo que tendremos

$$\frac{d^2 \tilde{l}^i}{d\tau^2} = c^2 \tilde{R}_{0j0}^i \tilde{l}^j = -\frac{\varepsilon c^2}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \tilde{l}^j = -\frac{\varepsilon c^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{g}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \tilde{l}^j = -\frac{\partial^2 \phi_g}{\partial x^i \partial x^j} \tilde{l}^j$$

En primer orden para un campo débil estacionario ϕ_g , un observador verá que una partícula se mueve con una aceleración relativa dada por la ecuación

$$\frac{d^2 \tilde{l}^i}{dt^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial x^i \partial x^j} \tilde{l}^j$$

El observador puede interpretar que está actuando una fuerza inercial $\tilde{F}^i(q^k)$ de forma que

$$\frac{d^2 \tilde{l}^i}{dt^2} = \tilde{F}^i(q^j + \tilde{l}^j) \approx \tilde{F}^i(q^j) \approx \frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial q^j} \tilde{l}^j$$

y por tanto identificará

$$\tilde{F}^i = -\frac{\varepsilon c^2}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^i} = -\frac{\varepsilon c^2}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \phi_g}{\partial x^i}$$

o en forma vectorial

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi_g$$

Es decir, el observador interpreta localmente el movimiento de la partícula que se mueve en el espacio tiempo según la geodésica con la geometría de $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, como si actuase una fuerza igual al gradiente del campo en un espacio plano.

Veremos más adelante que el principio de equivalencia de la relatividad remueve esta condición de localidad y le da un carácter universal.

En la formulación relativista, la naturaleza de la interacción del largo alcance de la gravitación está relacionada con el hecho de que su fuente es la masa-energía, y el momento de la materia y de la radiación es conservado. Como el propio campo gravitatorio también tiene energía, este se suma las fuentes, y hace las ecuaciones de campo sean no lineales.

Movimiento relativista en un campo escalar débil

Analizaremos ahora en detalle el movimiento de una partícula en un campo escalar en su trayectoria geodésica.

Supongamos que el campo escalar es débil en el sentido de que la energía potencial $m_0 \phi_g$, es mucho menor que la energía de la partícula en reposo $m_0 c^2$, y su velocidad es pequeña comparada con la de la luz, por lo que se verifica

$$\phi_g/c^2 \ll 1 \quad \text{y} \quad u^2/c^2 \ll 1$$

En este caso, las ecuaciones de movimiento, utilizando coordenadas cartesianas, y despreciando lo términos cuadráticos en la velocidad, se reducen a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\frac{ds}{d\tau}} \tilde{g}_{ii} \frac{dx^i}{d\tau} \right) = \frac{\gamma}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial q^i} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau}$$

Esta ecuación nos sugiere, que en el caso de campo débil, la métrica debe ser similar al caso euclídeo excepto en la componente $\tilde{g}_{00}$, que determinaremos más adelante mediante las ecuaciones movimiento

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \approx \tilde{g}_{00} dx^0 dx^0 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \gamma^2 c^2 \left(\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2} \right) d\tau^2$$

589

Por tanto, la ecuación de movimiento toma la expresión

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{c\gamma \sqrt{\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{dx^i}{d\tau} \right) = \frac{1}{2c\gamma \sqrt{\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial q^i} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{\gamma c}{2 \sqrt{\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial q^i}$$

Para un campo débil, es de esperar que sea $\tilde{g}_{00} \approx 1 + \Delta\tilde{g}_{00}$ con $\Delta\tilde{g}_{00} \ll 1$, tendremos

$$\begin{aligned} \gamma \sqrt{\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2}} &= \frac{\sqrt{\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 + \Delta\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx \sqrt{1 - \frac{\Delta\tilde{g}_{00}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}} \quad \text{y} \\ \frac{1}{\gamma \sqrt{\tilde{g}_{00} - \frac{u^2}{c^2}}} &\approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\tilde{g}_{00}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta\tilde{g}_{00} \end{aligned}$$

y por tanto, la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left(1 + \frac{1}{2} \Delta\tilde{g}_{00} \right) \frac{dx^i}{d\tau} \right) = \frac{c^2}{2} \frac{\partial \Delta\tilde{g}_{00}}{\partial q^i}$$

Los significados del campo electromagnético

Si comparamos esta ecuación con la que obtuvimos anteriormente a partir de la lagrangiana, vemos que debe ser

$$\Delta \tilde{g}_{00} = \frac{2\phi_g}{c^2}$$

Por tanto, en la aproximación de campo débil, la partícula sigue la misma trayectoria cuando se considera que se mueve en la geodésica de un espacio de Riemann con la métrica

$$d\tilde{s}^2 = \left(1 + \frac{2\phi_g}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

que cuando el espacio es euclídeo y se considera que la energía de la partícula es constante

$$E = m_0 c^2 + m_0 \phi_g$$

Sin embargo, esto no es solo una analogía matemática, y veremos que el principio de equivalencia de Einstein, veremos que postula que el potencial ϕ_g realmente crea una distorsión física en la geometría del espacio tiempo con la métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

Para ver la relación entre la geometría riemanniana y la geometría plana para campos débiles estacionarios, y su implicación en el principio de equivalencia, es hacer un desarrollo perturbativo del tensor métrico $\tilde{g}_{\alpha\beta}$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{M\alpha\beta} + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta}$$

suponiendo que $\varepsilon \ll 1$ y que $\gamma_{\alpha\beta}$ es un función que no depende de la coordenada temporal x_0 , y $g_{M\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ es el tensor métrico correspondiente a la geometría plana del espacio de Minkowski en coordenadas cartesianas.

Entonces será

$$\left(\frac{d\tilde{s}}{dt}\right)^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = c^2 - u^2 + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} + \varepsilon \gamma_{\alpha\beta} \frac{dq^\alpha}{dx^0} \frac{dq^\beta}{dx^0}\right)$$

Si consideremos que el campo es débil y bajas velocidades, mantendremos solo los términos de primer orden en ε y v/c , con lo que se aproximará

$$\left(\frac{d\tilde{s}}{dt}\right)^2 \approx c^2 (1 + \varepsilon \gamma_{00}) = c^2 \tilde{g}_{00}$$

La trayectoria geodésica viene dada por

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{s}} = 0$$

y como

$$\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{s}} = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \left(\frac{dt}{d\tilde{s}} \right)^2 = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{1}{c^2(1 + \varepsilon\gamma_{00})} \approx \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(1 + \varepsilon\gamma_{00})}$$

en primer orden será

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{00}^\sigma \left(\frac{dx^0}{d\tilde{s}} \right)^2 = \frac{d^2 x^\sigma}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{00}^\sigma c^2 = 0$$

De la definición de los símbolos de Christoffel se deduce para un campo estacionario

$$[00, \tilde{\mu}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial \tilde{g}_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial x^\mu} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial x^\mu} = -\frac{\varepsilon \partial \gamma_{00}}{2 \partial x^\mu}$$

$$\tilde{\Gamma}_{00}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} [00, \mu] \tilde{g}^{\sigma\mu} = -\frac{\varepsilon \partial \gamma_{00}}{2 \partial x^\mu} \tilde{g}^{\sigma\mu} \approx -\frac{\varepsilon \partial \gamma_{00}}{2 \partial x^\mu} g^{\sigma\mu}$$

Por tanto

$$\tilde{\Gamma}_{00}^0 = 0$$

$$\tilde{\Gamma}_{00}^i = \frac{\varepsilon \partial \gamma_{00}}{2 \partial x^i}$$

y la ecuación de la geodésica para un campo estacionario débil viene dada por

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2 \varepsilon \partial \gamma_{00}}{2 \partial x^i}$$

o en forma vectorial

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2 \varepsilon}{2} \vec{\nabla} \gamma_{00}$$

Vemos que $c^2 \varepsilon \gamma_{00}/2$ desempeña el papel de un potencial escalar como en la mecánica, cuyo gradiente determina la trayectoria de la partícula.

Comparando con el caso anterior tenemos que

$$\phi_g = \frac{c^2 \varepsilon}{2} \gamma_{00}$$

$$\tilde{g}_{00} = 1 + \varepsilon \gamma_{00} = 1 + \frac{2\phi_g}{c^2}$$

Un hecho relevante es que la fuerza que ejerce este potencial sobre la partícula es proporcional a su masa inercial, por lo que dicha masa no aparece en la ecuación dinámica. Por ello este tipo de fuerzas se llaman inerciales. En los sistemas acelerados también aparecen unas fuerzas ficticias inerciales, y el principio de equivalencia fuerte de la relatividad general, postula que estos sistemas acelerados deben ser equivalentes

a los sistemas inerciales con un campo escalar, y que todas las fuerzas inerciales y las originadas por los campos escalares son indistinguibles localmente

Precesión orbital en campo gravitatorio débil estático

El potencial para una partícula puntual en un campo gravitatorio viene dado por

$$\phi_g = -\frac{Gm_\odot}{|\vec{x}|}$$

El elemento métrico, será entonces

$$d\tilde{s}^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 |\vec{x}|}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

o en coordenada esféricas

$$d\tilde{s}^2 = \left(1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

592

Como ϕ_g tiene simetría esférica, tiene especial interés representar el tensor métrico y el hamiltoniano en coordenadas generalizadas esféricas.

Puesto que $d\tilde{s}^2$ debe ser además invariante ante las transformaciones de Poincaré, se demuestra que un tensor métrico que cumple estas condiciones es el elemento métrico de Schwarzschild

$$d\tilde{s}^2 = \left(1 - \frac{\alpha_s}{r} + \frac{\beta_s}{r^2}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha_s}{r} + \frac{\beta_s}{r^2}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

donde α_s y β_s son dos constante.

Para $\alpha_s = \beta_s = 0$ tenemos el espacio tiempo de Minkowski plano.

Puesto que la matriz del tensor métrico es diagonal, su inversión es trivial, y se deduce para el hamiltoniano la expresión

$$\tilde{H}_{mg} = \frac{\tilde{p}_0^2}{\left(1 - \frac{\alpha_s}{r} + \frac{\beta_s}{r^2}\right)} + \left(1 - \frac{\alpha_s}{r} + \frac{\beta_s}{r^2}\right) \tilde{p}_r^2 - \frac{1}{r^2} \left(\tilde{p}_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \tilde{p}_\varphi^2\right)$$

Para el caso de potencial gravitatorio débil, vemos que podemos identificar

$$\alpha_s = \frac{Gm_\odot}{c^2}$$

$$\beta_s = 0$$

Igual que en mecánica clásica, se puede elegir el plano orbital $\theta = \pi/2$ para analizar el movimiento, por lo que será en este caso

$$\tilde{H}_{mg} = \frac{\tilde{p}_0^2}{1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 r}} - \left(1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 r}\right) \tilde{p}_r^2 \frac{1}{r^2} (\tilde{p}_\theta^2 + \tilde{p}_\phi^2)$$

Puesto que además ahora $\tilde{H}_{mg}$ no depende de x^0 , θ y ϕ explícitamente, serán constantes los momentos canónicos asociados a estas variables

$$\tilde{p}_\theta = A$$

$$\tilde{p}_0 = B$$

$$\tilde{p}_\phi = C$$

El movimiento de la coordenada radial y angular se obtiene a partir de las ecuaciones canónicas de movimiento

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{H}_{mg}}{\partial \tilde{p}_r} = -2 \left(1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 r}\right) \tilde{p}_r$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial \tilde{H}_{mg}}{\partial \tilde{p}_\theta} = \frac{\partial \tilde{H}_{mg}}{\partial A} = \frac{2A}{r^2}$$

Eliminando la variable temporal se tiene que

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{A} \left(1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 r}\right) \tilde{p}_r$$

De la ecuación $\tilde{H}_{mg} = Em_0$ se obtiene $\tilde{p}_r$, por lo que la anterior ecuación se puede integrar por cuadraturas, para obtener la trayectoria orbital.

La presencia del término g_{00} diferente de 1 en la parte temporal de la métrica, hace que el tiempo de revolución de una órbita se vaya retrasando.

Si integramos, por ejemplo, las ecuaciones de Lagrange-Euler para una órbita planetaria circular, en cada periodo se retrasa un ángulo de $\theta \approx 6\pi Gm_\odot / c^2 R$.

Esta desviación ha sido observada en el retroceso del perihelio de Mercurio, que está lo suficientemente cerca del Sol para que sea necesaria una corrección relativista.

Relatividad en el tiempo en un campo gravitatorio débil

Si comparamos los intervalos de tiempo propio en dos posiciones fijas R y R' , ya que $ds = cd\tau = dt\sqrt{1 - \phi_g(R)}$ es un invariante, los tiempos propios estarán en la relación

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{1 + \frac{2\phi_g(R)}{c^2}}{1 + \frac{2\phi_g(R')}{c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 R}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 R'}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

al ser el intervalo dt es el mismo en todo el marco de referencia.

La frecuencias estarán en la relaciones inversa. Para un tren de impulsos periódico con un número fijo de dN ondas periódicas de frecuencia ν o período T , se verificará en R y R' que

$$dN = \nu d\tau = \nu' d\tau'$$

por lo que será

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{T}{T'} = \left(\frac{1 + \frac{2\phi_g(R)}{c^2}}{1 + \frac{2\phi_g(R')}{c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2 R}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 R'}} \right)^{\frac{1}{2}} = C^{te}$$

Esta ecuación se puede expresar también para un campo débil como

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{c^2} \Delta\phi_g$$

Es decir, los relojes observados atrasan cuando aumenta la gravedad. Una onda electromagnética procedente del Sol con una frecuencia fija, se verá en la tierra corrida al infrarrojo.

Es importante matizar el concepto de observación. Los relojes situados en diferentes ubicaciones transcurren con su tiempo propio. Las relaciones relativistas se aplican solo cuando se hacen medidas de observación desde un marco de referencia respecto a otro.

Si en la tierra un reloj se eleva a una altura h , las frecuencias estarán en la relación

$$\frac{\nu_{suelo}}{\nu_h} = \left(\frac{1 - \frac{2Gm}{c^2(R+h)}}{1 - \frac{2Gm}{c^2 R}} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{gh}{c^2}$$

donde g es el valor de la aceleración en el suelo.

Es decir, la frecuencia es más rápida en suelo que a una altura más elevada donde la gravedad es menor; o dicho de otra forma, el tiempo transcurre más lentamente en el suelo, donde la gravedad es mayor.

Supongamos ahora un cohete en el espacio con una aceleración g y un piloto situado a una distancia h , respecto a otro situado en la base, al que le lanza un rayo laser de frecuencia ν_h , en la dirección contraria al movimiento.

Cuando la velocidad de la nave es u , en un tiempo Δt_h , el número de pulsos emitidos es $\nu_h \Delta t_h$, y cuando estos llegan la base, la nave tendrá la velocidad $u + g \Delta t_h$.

Por la relatividad restringida, sabemos que en la base los intervalos de tiempo estarán dilatados en el factor

$$\gamma \Delta t_h = \frac{\Delta t_h}{\sqrt{1 - \left(\frac{u + g \Delta t_h}{c}\right)^2}} \approx \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \Delta t_h$$

por lo que los $\nu_h \Delta t_h$ pulsos serán recibidos durante un tiempo $\gamma \Delta t_h$, de forma que la relación de frecuencias observadas por efecto de la aceleración será

$$\frac{\nu_{base}}{\nu_h} = \frac{1}{\gamma} \approx 1 + \frac{gh}{c^2}$$

que nos reproduce otra vez la ecuación

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = - \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{c^2} \Delta \phi_g$$

donde ahora es $\phi_g = g$.

Este ejemplo muestra que la presencia de un campo gravitatorio es localmente equivalente a una aceleración constante. Esto llevó a Einstein a formular el principio de equivalencia.

Estos efectos se han comprobado mediante relojes atómicos situados en un avión, comparando las medidas con otros similares situados en tierra.

Propagación de la luz en un campo gravitatorio débil estático

La deflexión de la luz por un campo gravitatorio débil puede ser analizada teniendo en cuenta que esta se mueve siguiendo una geodésica nula en que se verifique

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{00}c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \left(1 + \frac{2\phi_g}{c^2}\right)c^2dt^2 - v^2dt^2 = 0$$

Por tanto, la velocidad de fase de la luz localmente será

$$v_f = c \sqrt{1 + \frac{2\phi_g}{c^2}} = c \sqrt{1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2r}}$$

Entre dos puntos fijos, la trayectoria del rayo es una curva extremal de la variación integral

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{P_1}^{P_2} d\tilde{s} = \delta \int_{\vec{x}_1, \tau_1}^{\vec{x}_2, \tau_2} \tilde{L}_{mg} \left(x^i, \frac{dx^i}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \right) d\tau = \int_{\vec{x}_1, \tau_1}^{\vec{x}_2, \tau_2} \left(\frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)} \delta \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right) + \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau} \right)} \delta \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \right) d\tau \\ 0 &= \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau} \right)} \delta t \Big|_{\vec{x}_1, \tau_1}^{\vec{x}_2, \tau_2} + \int_{\vec{x}_1, \tau_1}^{\vec{x}_2, \tau_2} \left(\frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)} \right) \delta x^i d\tau - \int_{\vec{x}_1, \tau_1}^{\vec{x}_2, \tau_2} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)} \delta t d\tau \\ &= \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau} \right)} \delta t \Big|_{\vec{x}_1, \tau_1}^{\vec{x}_2, \tau_2} - \int_{\vec{x}_1, \tau_1}^{\vec{x}_2, \tau_2} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)} \delta t d\tau \end{aligned}$$

por lo que deberá ser

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right)} = C^{te} = d$$

Por tanto, se verificará que

$$0 = \delta \int_{P_1}^{P_2} d\tilde{s} = \frac{\partial \tilde{L}_{mg}}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau} \right)} \delta t \Big|_{t_1}^{t_2} = d(\delta t_2 - \delta t_1) = d\delta \int_{P_1}^{P_2} dt = d\delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{dl}{v_f}$$

siendo

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Los rayos siguen aquellas trayectorias en que invierten el tiempo mínimo entre dos puntos cuando se mueven con la velocidad de fase local v_f .

Esto es análogo al principio de Fermat, cuando espacio se comporta con un índice de refracción variable

$$n(r) = \frac{c}{v_f} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\phi_g}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Gm_\odot}{c^2 r}}} \approx 1 + \frac{Gm_\odot}{c^2 r}$$

Veremos más adelante, que este índice de refracción realmente proviene de que se puede asociar al espacio una constante dieléctrica y una permitividad magnética $n = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$ que vienen dadas por

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = \left(1 + \frac{2\phi_g}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

La trayectoria del rayo se resuelve en este caso de forma similar a óptica geométrica

Si el movimiento es en un plano, utilizando coordenadas polares, la trayectoria vendrá dada por

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} n(r) \sqrt{1 + (d\phi/dr)^2} dr = 0$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen a

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{nr^2}{\sqrt{1 + (d\phi/dr)^2}} \right) = 0$$

lo que implica que

$$\frac{nr^2}{\sqrt{1 + (d\phi/dr)^2}} = C^{te} = d = nr \sin(\psi)$$

donde ψ es el ángulo que forman el radio vector y la tangente a la curva, y la distancia de impacto.

Esta ecuación se resuelve fácilmente por cuadraturas obteniéndose para ϕ en función de r

$$\phi = \phi_0 + d \int_{r_0}^r \frac{dr}{r(r^2 n^2(r) - d^2)}$$

Si consideramos un rayo proveniente del infinito, que toca rasantemente el sol, la deflexión total será

$$\Delta\varphi = \frac{4Gm_{\odot}}{c^2 r_{\odot}} \approx 1,75 \text{ arcseg}$$

Este resultado es importante, ya que es el doble del predicho por la mecánica clásica.

Principio de equivalencia

Establece que en un marco de referencia local, es indistinguible un sistema uniformemente acelerado de un campo gravitatorio local.

Además, un marco de referencia en un campo gravitatorio se puede contrarrestar localmente con una aceleración de forma que este sea localmente inercial.

Teoría general de la relatividad. Ecuaciones de Einstein

Einstein supuso que la métrica del espacio tiempo siempre se puede escribir de la forma riemanniana. En la aproximación de campo débil hemos visto que la métrica viene dada por

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 |\vec{x}|}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

con lo que será

$$\tilde{g}_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad \tilde{g}_{ii} = 1 \quad \text{y} \quad \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta$$

En adelante eliminaremos las tildes, ya que de acuerdo con el principio de equivalencia la métrica perturbada no es ficticia, sino que tiene una carácter físico real. Cuando nos refiramos a la métrica del espacio plano de Minkowsky la denominaremos como $g_{\alpha\beta}$.

Que las métricas invariantes ante transformaciones de Lorentz deban ser siempre riemanniana es un postulado todavía sin una justificación teórica satisfactoria, pero es lo que permite una geometrización de la física, que lleva implícito el principio de equivalencia y de la geometría de Minkowsky.

Sin este tipo de métrica en la naturaleza, el mundo sería muy distinto. Más allá de su simple apariencia, el que entre puntos del espacio infinitesimalmente próximos, se cumpla el teorema de Pitágoras, parece que encierra otras leyes más profundas, a

parte del principio de continuidad de Leibniz, que permite formular las leyes físicas con campos eliminando las acciones a distancia.

Premonitoriamente Clifford (1849-1879), ya vio en la geometría riemanniana la posibilidad para fusionar la geometría y la física, afirmando que el movimiento de la materia producía ondas que modificaban la curvatura del espacio.

Los rayos de luz, siguen siempre las trayectorias que hacen $ds^2 = 0$.

Un rayo de luz que viniese de una estrella lejana y pasase rozado la superficie del sol, por la anterior formula sufriría una deflexión con un ángulo $\theta \approx 4Gm_{\odot}/c^2r_{\odot}$, que fue confirmado experimentalmente por Eddington en 1919.

Como ya hemos comentado, las partículas siguen la trayectoria que maximiza el tiempo propio τ .

Esto se puede comprobar si calculamos la trayectoria de un proyectil en la superficie de la tierra, en que será

$$c^2 d\tau^2 \approx \left(1 + \frac{2gy}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2$$

Si hacemos nula la variación de la acción

$$\delta S = \delta \int d\tau = 0$$

entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange toman la expresión

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + g = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

que corresponden a la conocida ecuación de la parábola balística.

Las partículas se mueven libremente en la línea del mundo según una geodésica y, cerca de la superficie de la tierra, siguen una trayectoria en el espacio tiempo aproximadamente circular, con radio de curvatura dado por $c^2/g \approx \text{año luz}$. Por esta razón, las trayectorias cerca de la superficie de la tierra son casi rectas en el espacio-tiempo y se puede considerar la superficie de la tierra como sistema inercial, ya que los efectos de gravitación son débiles y las correcciones relativistas pequeñas.

La presencia del término g_{00} diferente de 1 en la parte temporal de la métrica, hace que el tiempo de revolución de una órbita se vaya retrasando Si integramos, por ejemplo, las ecuaciones de Lagrange-Euler para una órbita planetaria circular, el periodo se retrasa un ángulo de $\theta \approx 4Gm_{\odot}/c^2r_{\odot}$.

Esta desviación ha sido observada en el retroceso del perihelio de Mercurio, que está lo suficientemente cerca del Sol para que sea necesaria una corrección relativista.

Un hecho relevante es que, al seguir las partículas las trayectorias que maximizan el tiempo propio, el concepto de fuerza de la física clásica desaparece. La materia crea distorsiones en el espacio-tiempo y las partículas siguen las trayectorias geodésicas para las cuales el cuadvectores de aceleración es nulo.

Esto es muy diferente del electromagnetismo, en que las cargas siguen las trayectorias que extremalizan la acción de una lagrangiana, que no tiene por qué maximizar el tiempo propio, lo que ocasiona que aparezca el concepto de la fuerza de Lorentz. Esto hace que la gravitación y el electromagnetismo sean dos tipos de leyes físicas conceptualmente distintas en este sentido.

Si tenemos en cuenta que el laplaciano ∇^2 es proporcional a la curvatura local de Gauss, la ecuación clásica del potencial gravitatorio $\nabla^2 \phi_g = 4\pi G \rho_g$, en realidad lo que nos está relacionando es la curvatura local, dada por $\nabla^2 \phi_g$ de la geometría del espacio tiempo con la distribución de masa ρ_g .

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi_g}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Para una geometría riemanniana ds^2 , la curvatura viene definido por el tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{|g|}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\mu\beta}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^\sigma}$$

siendo los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) g^{\sigma\mu}$$

y su contracción

$$\Gamma_{\sigma\beta}^\sigma = \frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^\beta}$$

donde $|g|$ el valor absoluto del determinante del tensor $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

Las líneas geodésicas vienen dadas por las curvas que hacen mínima la distancia entre dos puntos y por tanto es nula la variación de $\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0$.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a la anterior variación, obtenemos

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tilde{s}^2} + \tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tilde{s}} \frac{dx^\sigma}{d\tilde{s}} = 0$$

que es equivalente también a que se anule la aceleración cuadrimensional en dicha trayectoria.

Es importante observar que $R_{\alpha\beta}$ y $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$ están determinado sólo por las derivadas primeras de los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ del tensor métrico.

La curvatura local viene dada por la contracción del tensor de curvatura

$$R = R_{\alpha}^{\alpha}$$

que, para una geometría euclídea es cero.

Esto sugiere la posibilidad de interpretar las trayectorias de las partículas, sujetas a la acción de fuerzas gravitatorias no nulas, como geodésicas en un espacio riemanniano, con un tensor de curvatura no nulo, y también equivalentes al movimiento en un sistema de referencia acelerado en el que los cuadvectores de las fuerzas que actúan se anulan.

Con esta interpretación el concepto de fuerza dinámica desaparece y el movimiento según las trayectorias geodésicas, está determinado solamente por la métrica riemanniana del espacio-tiempo y las primeras derivadas del tensor métrico. Por tanto, un sistema no inercial es equivalente a la transformación de pasar a un sistema inercial con una métrica riemanniana.

La existencia de una métrica riemanniana es lo que hace factible el principio de equivalencia.

La ecuación $R_{\alpha\beta} = 0$ es equivalente, en la anterior aproximación de campo débil, a $\nabla^2 \phi_g = 0$, ya que en este caso sólo es no nula la componente

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

La condición de anulación del tensor de Ricci nos da

$$0 = \frac{\partial \Gamma_{00}^i}{\partial x^i} = -\nabla^2 g_{00} = -\frac{2}{c^2} \nabla^2 \phi_g$$

que es la ecuación de Laplace para el potencial gravitatorio en el vacío.

Además, como las derivadas espaciales dx^i/ds son despreciables frente a $dx^0/ds \approx 1$, la ecuación de movimiento viene dada s por

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -c^2 \Gamma_{00}^i = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = -\vec{\nabla} \phi_g$$

que corresponde con la ecuación de Newton en el límite de un potencial gravitatorio débil.

Se define el tensor de Einstein por

$$G_{\beta}^{\alpha} \equiv R_{\beta}^{\alpha} - \frac{\delta_{\beta}^{\alpha}}{2} R$$

Einstein postuló que, en el vacío, los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ verifican las ecuaciones

$$G_{\beta}^{\alpha} = 0$$

Una vez encontrado un conjunto de $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ que satisfice la anterior ecuación, se pueden determinar las curvas geodésicas para las trayectorias, que concordarán con las de Newton en el límite clásico para $c \rightarrow \infty$.

Sabemos que la invarianza relativista de la acción impone la existencia de un tensor simétrico de energía-momento. En caso de presencia de materia, existirá un tensor de energía-momento $T_m^{\alpha\beta}$, cuyas componentes serán, T_m^{00} la densidad de energía, $T_m^{\alpha 0}/c$ la densidad de momento, y $cT_m^{0\beta}$ el flujo de energía.

Einstein postuló que, en presencia de materia, las ecuaciones que determinan las $g_{\alpha\beta}$ vienen dadas por la ecuación

$$G_{\beta}^{\alpha} = 8\pi T_m^{\alpha\beta}$$

Una vez encontrado un sistema de $g_{\alpha\beta}$ que satisfice la anterior ecuación, se pueden determinar las curvas geodésicas para las trayectorias.

En la aproximación de campo gravitatorio débil, será

$$R_{\alpha\beta} = 4\pi G\rho_g$$

y se obtiene la aproximación Newtoniana

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G\rho_g$$

Consideremos el caso simple de una distribución homogénea de partículas sin interacción que se mueven paralelamente cada una de ellas con un momento igual a

$$\vec{p} = m_0 \vec{u} = (\gamma m_0 c, \gamma m_0 \vec{u}) = (mc, \vec{p})$$

La densidad de corriente vendrá dada por

$$\vec{N} = n_0 \vec{u} = (\gamma n_0 c, \gamma n_0 \vec{u}) = (nc, \vec{p})$$

donde n_0 es el número de partículas por unidad de volumen en el sistema de referencia en reposo.

El tensor invariante de energía-momento de la materia sin interacción vendrá dado por

$$T_m^{\alpha\beta} = \mathcal{P}^\alpha \mathcal{N}^\beta = \rho \mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}^\beta$$

siendo ρ la densidad observada

$$\rho = (\gamma n_0)(\gamma m_0)$$

que incluye los efectos relativistas por la contracción del espacio en la dirección del movimiento.

Para el caso de un fluido con una presión interna P_r , en el tensor de energía-momento, los elementos fuera de la diagonal son cero y en la diagonal toman la expresión:

$$T_f^{00} = \rho c^2 \quad \text{y} \\ T_f^{ii} = P_r$$

Puesto que la divergencia del tensor energía impulso debe ser nula si la materia está en un sistema cerrado, será entonces

$$\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial T_m^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0$$

y de aquí también se pueden obtener la ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de Einstein también se pueden derivar a partir de un principio variacional.

Las ecuaciones de Einstein para el vacío, se pueden obtener a partir de la variación de la acción

$$S_g = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} R \sqrt{|g|} d^4x$$

Haciendo la variación, se obtiene

$$\delta S_g = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} d^4x = 0$$

que nos lleva a

$$G_{\alpha\beta} = 0$$

que son las ecuaciones de Einstein para el vacío.

Para la obtención de los anteriores resultados, se hace uso de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{\alpha\beta}} &= \frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g^{\alpha\beta}} & \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} &= g g^{\alpha\beta} \\ \frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} &= -g g_{\alpha\beta} & \frac{\delta R\sqrt{|g|}}{\delta g^{\alpha\beta}} &= G_{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\end{aligned}$$

Campo gravitatorio producido por la energía del campo electromagnético

Un análisis alternativo, es emplear el elemento métrico de Schwarzschild

$$d\tilde{s}^2 = \left(1 - \frac{\alpha_s}{r} + \frac{\beta_s}{r^2}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\alpha_s}{r} + \frac{\beta_s}{3r^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein, para una carga de masa m y carga q se pueden resolver, dando como resultado

$$\alpha_s = \frac{2Gm}{c^2} \quad \text{y} \quad \beta_s = \frac{4G}{c^2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2}$$

De esta ecuación se desprende que el efecto de la energía del campo eléctrico en la distorsión del espacio decae con la distancia más rápidamente que el efecto gravitatorio

Campo electromagnético en un campo gravitatorio

Si consideramos que al campo gravitatorio se le superpone un campo adicional representado por una lagrangiana, como puede ser el campo electromagnético

$$\mathcal{L}_c = -\frac{\epsilon_0}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

donde $F_{\alpha\beta}$ es el tensor electromagnético

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha$$

y $\mathcal{A}^\alpha = (\phi, \vec{A})$ es el potencial electromagnético.

La lagrangiana total en un campo gravitatorio será entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} R\sqrt{|g|} + \mathcal{L}_c$$

y la variación de la acción nos dará

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{16\pi} G_{\alpha\beta} + \frac{1}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta(\mathcal{L}_c \sqrt{|g|})}{\delta g^{\alpha\beta}} \right) \delta g^{\alpha\beta} d^4x = 0$$

con lo que se obtiene la ecuación de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

siendo

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta(\mathcal{L}_c \sqrt{|g|})}{\delta g^{\alpha\beta}}$$

Las anteriores ecuaciones determinan como el campo electromagnético influye sobre las ecuaciones del campo gravitatorio, ya que en la variación, se mantienen constantes las variables del campo electromagnético.

Si se quiere conocer, como el campo gravitatorio influye sobre las variables del campo electromagnético, se tiene que hacer la variación sobre las funciones de campo A^α , cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange nos lleva a

$$\frac{\partial(\mathcal{L} \sqrt{|g|})}{\partial A^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial(\mathcal{L} \sqrt{|g|})}{\partial A^\beta_{,\alpha}} = 0$$

Se define como derivada covariante de una función f como

$$\frac{d_c f}{dx^\alpha} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial(\sqrt{|g|} f)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\beta f$$

con lo que la anterior ecuación se reescribirá como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} - \frac{d_c}{dx^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta_{,\alpha}} = 0$$

que nos determina las ecuaciones del campo electromagnético en presencia de una campo gravitatorio, ya que en la variación, hemos mantenido constantes las variables del campo gravitatorio.

La derivada covariante sustituye a la derivada normal siempre que nos encontremos con una geometría riemanniana, y ella misma ya tiene en cuenta el cambio de orientación de los ejes al pasar de una posición a otra del espacio riemanniano, incorporando todas las propiedades de la geometría diferencial del espacio.

Una ecuación tensorial que emplea la derivada covariante es invariante para todas las métricas riemannianas de coordenadas curvilineas espacio temporales.

Principio general de la covarianza

El principio de equivalencia de la relatividad general establece que si S y S' son dos sistemas físicos, cualquier relación funcional F entre magnitudes físicas tensoriales $\phi_{\beta}^{\alpha}, \dots$, que expresa una ley de la naturaleza, tienen la misma forma invariante (covariante) en ambos sistemas cuando se hace la transformación de uno a otro $S \leftrightarrow S'$

$$F(\phi_{\beta}^{\alpha}, \dots, \partial_{\mu} \phi_{\beta}^{\alpha}, \dots) = 0 \text{ en } S \text{ y}$$

$$F(\phi'^{\alpha}_{\beta}, \dots, \partial_{\mu} \phi'^{\alpha}_{\beta}, \dots) = 0 \text{ en } S'$$

Las leyes de la física se expresan de forma natural en forma tensorial. El teorema fundamental de los tensores, establece que si una relación tensorial se anula en un sistema de coordenadas, entonces se anulará al pasar tensorialmente a otro sistema de coordenadas equivalente.

Para aclarar que significa la invarianza de la forma covariante, supongamos que hacemos una transformación general de coordenadas

$$x^{\alpha} \rightarrow x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^{\beta}) \quad \text{o}$$

$$x^{\alpha} \rightarrow x'^{\alpha} = g^{\alpha}(x'^{\beta})$$

Se verificara entonces

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta} \equiv \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\beta} dx'^{\beta} \quad \text{y}$$

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta} \equiv \frac{\partial g^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} dx'^{\beta} \equiv \Lambda_{\beta}^{\alpha} dx'^{\beta}$$

definiéndose

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}$$

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = (\Lambda^{\beta}_{\alpha})^{-1}$$

ya que se verifica

$$\Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda_{\beta}^{\mu} \equiv \delta_{\beta}^{\alpha}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\beta} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \equiv \delta_{\beta}^{\alpha}$$

Si una ecuación que representa una ley física viene representada por una expresión tensorial de la forma

$$F(\phi_{\beta}^{\alpha}, \dots, \partial_{\mu} \phi_{\beta}^{\alpha}, \dots) = 0$$

entonces, el principio de la covarianza establece que su forma funcional se mantiene cuando se hace una transformación tensorial covariante

$$F(\phi^{\alpha}_{\beta}, \dots, \partial_{\mu} \phi^{\alpha}_{\beta}, \dots) = 0$$

siendo la relación de transformación de las magnitudes tensoriales

$$\phi'^{\alpha}_{\beta}(x^{\kappa}) = \Lambda_{\beta}^{\sigma} \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \phi^{\gamma}_{\sigma}(x^{\kappa})$$

$$\partial_{\mu} \phi^{\alpha}_{\beta}(x^{\kappa}) = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\beta}^{\sigma} \Lambda_{\gamma}^{\alpha} \partial_{\rho} \phi^{\gamma}_{\sigma}(x^{\kappa})$$

Por $\phi(x^{\alpha})$ se indica que la forma de dependencia funcional respecto a x^{α} después de la transformación puede ser distinta que la de $\phi(x^{\kappa})$ respecto a x^{κ} .

En el caso del espacio plano de Minkowski, la matriz de transformación Λ^{α}_{β} se reduce a la matriz de Lorentz $\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta}$.

Relaciones de transformación covariantes

El vector (dx^{α}) es un vector contravariante ya que se transforma de la forma

$$x^{\alpha} \rightarrow \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \equiv \Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta}$$

607

En cambio el vector gradiente $(\partial_{\alpha} \phi)$ de un escalar es un vector covariante ya que se transforma de forma inversa que (dx^{α})

$$\partial_{\alpha} \phi = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}} = \Lambda^{\beta}_{\alpha} \partial_{\beta} \phi \quad \text{o}$$

$$\partial_{\beta} \phi = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} \partial_{\alpha} \phi$$

El Jacobiano J de la transformación se define como el determinante de la transformación

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right| \equiv |\Lambda^{\alpha}_{\beta}|$$

En geometría de los espacios de Riemann, el elemento métrico debe ser un invariante ante las transformaciones por lo que se verificará

$$ds^2 = g^{\alpha}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \equiv g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} dx^{\alpha'} dx^{\beta'}$$

por lo que el tensor métrico se transforma como un tensor covariante

$$g'_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} = \Lambda_{\alpha'}^\alpha \Lambda_{\beta'}^\beta g_{\alpha\beta} \quad \text{o}$$

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha'}^\alpha \Lambda_{\beta'}^\beta g'_{\alpha'\beta'}$$

Port tanto, se verifica también que

$$|g'_{\alpha'\beta'}| = |\Lambda_{\alpha'}^\alpha|^2 |g_{\alpha\beta}| = \frac{|g_{\alpha\beta}|}{J^2}$$

o también

$$\sqrt{|g'|} = J^{-1} \sqrt{|g|}$$

siendo el determinante $g = |g_{\alpha\beta}|$.

Debe tenerse en cuenta que $|g| < 0$, ya que el tensor métrico de Minkowski es negativo $|g_M| = -1$, y su signo es un invariante ante las transformaciones como una propiedad de todos los determinantes.

Una propiedad importante, es que la derivada covariante del tensor métrico es siempre idénticamente nula

$$g_{\alpha\beta;\mu} \equiv 0$$

El elemento de volumen $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ se transforma de acuerdo con el Jacobiano de la transformación como

$$d\Omega' = J d\Omega$$

que se puede describir también como la relación invariante

$$\sqrt{|g'|} d\Omega' = \sqrt{|g|} d\Omega$$

Un densidad tensorial ϕ^α se transforma como un tensor multiplicado por el inverso del Jacobiano de la transformación

$$\phi'^{\alpha'}_{\beta'} = J^{-1} \Lambda_{\beta'}^\sigma \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \phi^\gamma_\sigma \quad \text{o}$$

$$\frac{\phi'^{\alpha'}}{\sqrt{|g'|}} = \Lambda_{\beta'}^\sigma \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \frac{\phi^\gamma_\sigma}{\sqrt{|g|}}$$

Puesto que $\sqrt{|g|}$ se comporta como una densidad escalar, si ϕ^γ_σ es una densidad tensorial $\phi^\gamma_\sigma / \sqrt{|g|}$ es un tensor. A la inversa si ϕ^γ_σ es un tensor, entonces $\sqrt{|g|} \phi^\gamma_\sigma$ es una densidad tensorial.

Para que una integral de volumen sea invariante, el integrando debe ser una densidad tensorial, ya que esto garantiza la invarianza numérica, como en el caso de una densidad escalar ϕ

$$\int_{\Omega} \phi^* d\Omega^* = \int_{\Omega} \phi d\Omega$$

De acuerdo con la geometría diferencial, se define la divergencia de un campo vectorial contravariante como

$$\text{div } \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} A^\alpha_{;\alpha} = A^\alpha_{,\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} A^\beta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(A^\alpha_{,\alpha} \sqrt{|g|} + A^\beta \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha (A^\alpha \sqrt{|g|})$$

El rotacional se define como

$$\text{rot}_{\alpha\beta} \vec{A} = A^\beta_{;\alpha} - A^\alpha_{;\beta} \equiv A^\beta_{,\alpha} - A^\alpha_{,\beta}$$

Existe una única densidad tensorial antisimétrica covariante con todas sus componentes constantes iguales en valor absoluto, y que sus derivadas covariantes son nulas

$$e_{\alpha\beta\mu\sigma} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma} \quad \text{y} \\ e_{\alpha\beta\mu\sigma;\delta} \equiv 0$$

donde $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}$ es el tensor de Levi-Civita, que es nulo si dos componentes son iguales, y en caso contrario, igual al signo de la permutación de $[\alpha\beta\mu\sigma]$.

Su forma contravariante, es una densidad tensorial antisimétrica con todas sus componentes constantes iguales en valor absoluto, y con sus derivadas covariantes son nulas

$$e^{\alpha\beta\mu\sigma} = \frac{-1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \quad \text{y} \\ e^{\alpha\beta\mu\sigma}_{;\delta} \equiv 0$$

A partir de estas formas se define el tensor o la densidad dual de una densidad o un tensor como

$$\mathcal{F}^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma} \sqrt{|g|} \mathcal{F}^{\mu\sigma} \\ \mathcal{F}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} e^{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}^*_{\mu\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}^*_{\mu\sigma}$$

Sistemas no inerciales en rotación

Consideremos que respecto a un sistema inercial en reposo S_0 con coordenadas cartesianas (ct_0, x_0, y_0, z_0) . Sea S un sistema en rotación con respecto a S_0 , cuyo eje de rotación coincide con el eje z_0 , y velocidad angular ω .

En coordenadas polares, designaremos por (ct, r, φ, z) las coordenadas del sistema móvil S , y por $(ct_0, r_0, \varphi_0, z_0)$ las del sistema inercial fijo S_0 . La transformación de coordenadas de S_0 a S viene dada por

$$\begin{aligned}x_0 &= r \cos \varphi_0 & y_0 &= r \sin \varphi_0 & z_0 &= z \\ \varphi_0 &= \varphi + \omega t & t_0 &= t\end{aligned}$$

El elemento métrico será

$$\begin{aligned}ds^2 &= c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2) \\ &= (c^2 - \omega^2(x^2 + y^2))dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2\omega(ydx - xdy)dt \\ &= (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + 2\omega d\varphi dt + dz^2)\end{aligned}$$

El tiempo propio en un punto fijo del sistema móvil será entonces

$$d\tau = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) dt$$

lo que nos indica que los intervalos de tiempo observados desde el sistema fijo, para dos sucesos que ocurren con el mismo intervalo propio en el sistema móvil pero situados en puntos fijos a distancias r_1 y r_2 , están en la relación

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{\frac{1 - \omega^2 r_2^2 / c^2}{1 - \omega^2 r_1^2 / c^2}}$$

Debido al término cruzado $d\varphi dt$ en la métrica ds^2 , la parte espacial y temporal están acopladas. Si se redefine la coordenada temporal en un nuevo marco de referencia S^* como

$$dt^* = dt + \frac{\omega}{c^2 - \omega^2 r^2} (ydx - xdy) = dt - \frac{\omega^2 r^2}{c^2 - \omega^2 r^2} d\varphi$$

entonces la métrica toma una forma diagonal

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2\right) c^2 dt^{*2} - \left(dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} d\varphi^2 + dz^2\right)$$

Se denomina marco de referencia a un sistema de coordenadas que preserva el orden temporal de los sucesos conectados causalmente. Todos los marcos de referencia son igualmente válidos, ya que las coordenadas no son más que una forma que de etiquetar de forma ordenada los sucesos que ocurren ellos.

Los intervalos $\Delta r, \Delta \varphi, \Delta z$ para $dt^* = 0$ corresponden a medidas de intervalos espaciales en el sistema móvil. Sin embargo, como ya vimos en el capítulo de teorías covariantes, dt y dt^* , así como ds , no son una diferencial exacta, y por tanto, no es posible asignar unívocamente una coordenada temporal simultánea en todos los puntos del espacio del marco de referencia.

Puesto que dt^* no es una forma integrable a todo el espacio, no existe una transformación global $t^* = t^*(\vec{x}, t)$. Sin embargo en un punto x, y , si se hace la transformación local

$$\begin{aligned} t^* &= t + \frac{\omega}{c^2 - \omega^2 r^2} (y^* x - x^* y) \\ x^* &= x \\ y^* &= y \end{aligned}$$

entonces se obtiene una métrica diagonal en ese punto

$$ds^2 = dt^{*2} - (dx^{*2} + dy^{*2} + dz^{*2}) + 2\omega((y^* - y)dx^* - (x^* - x)dy^*)dt^*$$

Obsérvese que no hay dilatación radial, y que Δr , es la misma en S_0, S o S^* , lo cual siempre se puede hacer midiendo con reglas rígidas o recalibrando las medidas para compensar los efectos de la fuerza centrífuga.

Se puede explicar la forma del tensor métrico teniendo en cuenta su relación con las medidas efectuadas desde los sistemas fijo S_0 y móvil S .

Se define por dl la parte espacial del elemento métrico medido en S

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Sea S_I un sistema de inercia en reposo instantáneo en un punto (r, φ) de S , y dl la medida de distancia realizada entre dos puntos próximos en S_I .

En la dirección radial la medida de distancia dl en S_I entre los puntos $(r + dr, \varphi)$ y (r, φ) será $dl = dr$ y coincidirá con la medida efectuada también en S_0 . En cambio, la distancia dl entre los puntos $(r, \varphi + d\varphi)$ y (r, φ) perpendiculares al radio, tendrá que ser, teniendo en cuenta la contracción de Lorentz vista desde el sistema inercial en reposo S_0 , ya que se mueven con velocidad perpendicular la dirección de la medida

$$rd\varphi = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dl = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dl = dl \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$$

Por tanto, la distancia dl medida en el sistema S_I entre dos puntos $(r + dr, \varphi + d\varphi)$ y (r, φ) será

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} d\varphi^2 + dz^2$$

Debido a postulado de los relojes o de la cronometría los tiempos medidos no dependen de la aceleración. Si Δt_0 es el intervalo de tiempo medido en S_0 para un suceso que ocurre en (r, φ) , en S_I se observará en con un intervalo de tiempo Δt , que teniendo en cuenta la dilatación relativista de tiempos de Lorentz, se tendrá que

$$\Delta t = \Delta t_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$$

Si comparamos con la métrica de Schwartzschild en coordenadas cilíndricas, vemos que el elemento métrico en el sistema rotatorio S , el tensor métrico tiene como componente temporal

$$g_{00} = 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} = 1 + \frac{2\phi_g}{c^2}$$

al que se le puede asociar el potencial escalar estático

$$\phi_c = -\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

que en mecánica clásica se asocia con el creador de la fuerza centrífuga.

Un observador fijo O_p en el sistema rotatorio S atribuirá la diferencia de los intervalos de tiempo propio en un punto fijo como debido al efecto de un campo escalar gravitatorio

$$d\tau = dt \sqrt{1 + 2\phi_c(r)/c^2} \Rightarrow \frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \sqrt{\frac{1 + 2\phi_c(r_2)/c^2}{1 + 2\phi_c(r_1)/c^2}} = \sqrt{\frac{1 - \omega^2 r_2^2/c^2}{1 - \omega^2 r_1^2/c^2}}$$

Sin embargo, un observador O_0 situado en el origen del sistema fijo S_0 , atribuirá la diferencia de intervalos al movimiento cinemático relativista de la transformación de la ecuaciones de Lorentz entre el sistema S_I y S con la velocidad angular $v = \omega r$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow \frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \sqrt{\frac{1 - v_2^2/c^2}{1 - v_1^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 - \omega^2 r_2^2/c^2}{1 - \omega^2 r_1^2/c^2}}$$

Esta equivalencia se puede expresar de la forma

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\omega^2 r^2/c^2}} \leftrightarrow \frac{d\tau}{\sqrt{1+2\phi_c(r)/c^2}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\omega^2 r^2/c^2}}$$

Sistema inercial fijo Sistema no inercial rotatorio

Para una transformación general $x^\alpha = x^\alpha(x_0^\beta)$ se verifica

$$ds^2 = dx^0 dx^0 - dx_0^k dx_0^k = \left(\frac{\partial x_0^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^\beta} - \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

por lo que se puede identificar

$$g_{\alpha\beta} = g_{M\mu\sigma} \frac{\partial x_0^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^\sigma}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x_0^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^\beta} - \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\beta}$$

El tensor métrico en el marco de referencia S estará representado en coordenadas cilíndricas por la matriz

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 r^2/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\omega r^2/c \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & -\omega r^2/c & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo $\alpha, \beta = x^0, r, \varphi, z$

Obsérvese que la matriz del tensor métrico para las rotaciones es igual a la unidad

$$|g| = 1$$

Para el sistema en rotación, teniendo en cuenta que

$$u^x = -\omega$$

$$u^y = \omega x$$

se puede escribir también el tensor métrico en coordenadas cartesianas como

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - u^2/c^2 & -u^x & -u^y & 0 \\ -u^x & -1 & 0 & 0 \\ -u^y & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las curvas geodésicas en S para el movimiento de una partícula libre vienen dadas anulando la variación de la integral del elemento métrico

$$0 = \delta \int ds = \delta \int \left((c^2 - \omega^2 r^2) dt^2 - \left(dr^2 + r^2 \frac{d\varphi^2}{d\tau^2} + 2\omega \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} + \frac{dz^2}{d\tau^2} \right) \right) d\tau$$

Los significados del campo electromagnético

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para las variables r, φ, t, z reproducen las conocidas ecuaciones de la mecánica clásica para las aceleraciones centrífuga y de Coriolis en sistema S

$$\begin{aligned}\frac{dr^2}{d\tau^2} &= r\omega^2 \\ r \frac{d\varphi}{d\tau} &= -2\omega \frac{dr}{d\tau} \\ \frac{dz^2}{d\tau^2} &= 0\end{aligned}$$

La velocidad u^i de un punto fijo P ($dx^i = 0$) en S respecto a S_0 , será

$$u^i = c \frac{dx_0^i}{dx_0^0} = c \frac{\frac{\partial x_0^k}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} dx^i}{\frac{\partial x_0^0}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x_0^0}{\partial x^i} dx^i} = c \frac{\frac{\partial x_0^k}{\partial x^0}}{\frac{\partial x_0^0}{\partial x^0} + \frac{\partial x_0^0}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dx^0}}$$

Si escogemos un sistema de inercia S' , respecto al cual el punto P se encuentra instantáneamente en reposo, entonces respecto a este sistema será $u^i = 0$ y, por tanto $\partial x_0^k / \partial x^0 = 0$.

Puesto que las medidas se realizan con reglas entre dos puntos de forma simultánea, es conveniente definir el tensor métrico espacial en S' como

$$dl_0^2 \triangleq (dx_0^0)^2 + (dx_0^1)^2 + (dx_0^2)^2 \triangleq \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

Puesto que

$$dl_0^2 = dx_0^k dx_0^k = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^j} dx^i dx^j$$

entonces será

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^j}$$

Además será

$$\begin{aligned}g_{00} &\equiv \frac{\partial x_0^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^\beta} - \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x_0^0}{\partial x^0} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^0} \\ g_{0i} &\equiv \frac{\partial x_0^0}{\partial x^0} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^i} - \frac{\partial x_0^k}{\partial x^0} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x_0^0}{\partial x^0} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^i} \\ g_{ij} &\equiv \frac{\partial x_0^0}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^j} - \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^j}\end{aligned}$$

Se define, como los potenciales vectores a

$$\gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x_0^0}{\partial x^i} \equiv \frac{g_{0i}}{\left(\frac{\partial x_0^0}{\partial x^0}\right)} \equiv \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$$

Por tanto, el tensor métrico espacial viene dada también por

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + \gamma_i \gamma_j$$

De acuerdo con la teoría de determinantes, el determinante del tensor métrico $\gamma = |\gamma_{ij}|$ verifica también la relación

$$|\gamma| = \frac{|g|}{g_{00}}$$

El elemento métrico en S se puede describir entonces de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0j} dx^0 dx^j + g_{ij} dx^i dx^j \\ &= (g_{00})(dx^0)^2 + 2\sqrt{g_{00}}\gamma_j dx^0 dx^j + \gamma_i \gamma_j dx^i dx^j - \gamma_{ij} dx^i dx^j \\ &= \left(\sqrt{g_{00}} dx^0 + \gamma_j dx^j\right)^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j = \left(\sqrt{g_{00}} - \frac{\gamma_j u^j}{c}\right)^2 (dx^0)^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$

Dividiendo por dt se obtiene la ecuación que relaciona el tiempo propio con el tiempo en el marco inercial fijo, para un punto que se mueve en S con velocidad (u^i)

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\left(\sqrt{g_{00}} - \frac{\gamma_j u^j}{c}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2}}$$

siendo

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{dx^i}{dt} \\ u &= \frac{dl_0}{dt} = \sqrt{\gamma_{ij} u^i u^j} \end{aligned}$$

Para un punto fijo en S ($u^i = 0$), recuperamos la relación obtenida anteriormente.

En coordenadas cilíndricas serán

$$dl_0^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} d\varphi^2 + dz^2$$

$$(\gamma_i) = \left(0, \frac{\omega^2 r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}, 0 \right)$$

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \omega^2 r^2 / c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las anteriores ecuaciones permiten reinterpretar los tiempos de otra forma. Consideremos una partícula que en un sistema inercial S_0 gira en una órbita circular de radio R con velocidad angular ω bajo la acción un potencial gravitatorio central ϕ_c .

Consideremos un observador O_p situado en una posición fija junto con la partícula ($v = 0$). En el tiempo de una revolución $\Delta t = 2\pi/\omega$ medido por un observador fijo O_0 situado en el origen de S_0 , el tiempo propio en la posición de la partícula tendrá que haber variado de acuerdo con la relación cinemática de la relatividad restringida para el tiempo propio de la partícula

$$\Delta\tau_p = \Delta t \sqrt{1 + \frac{2\phi_g(R)}{c^2}} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{1 + \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}$$

Para el observador O_p situado en la posición fija junto con la partícula ($u = 0$), el campo gravitatorio centripeto ϕ_g es compensado por un campo centrífugo ϕ_c de forma que las fuerzas se compensen y sea $\partial_i \phi_g = -\partial_i \phi_c$ por lo que será también

$$\Delta\tau_p = \Delta t \sqrt{1 + \frac{2\phi_g(R)}{c^2}} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}$$

Pero también, se puede considerar que desde el punto de vista del observador O_p en la partícula, el observador O_0 se mueve en un campo escalar centrífugo, y la variación de su tiempo propio habrá sido

$$\Delta\tau_o = \Delta t \sqrt{\left(\sqrt{1 + \frac{2\phi_c(R)}{c^2}} - \frac{\gamma_j u^j}{c} \right)^2 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

y por tanto será

$$\Delta\tau_p = \Delta\tau_o \sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}$$

que concuerda con los resultados obtenidos anteriormente, aunque la interpretación física es distinta desde el punto de vista de cada uno de los observadores.

La ecuación de la trayectoria geodésica en S , para las coordenadas espaciales cartesianas vimos que viene dada por

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

con la condición auxiliar

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = c^2$$

Esta condición implica la relación

$$g_{00} + g_{ij} \frac{u^i u^j}{c^2} + 2g_{ij} \frac{u^j}{c} = \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2$$

Las componentes de la curva geodésica para $\beta = j$, toman la expresión

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} \left(c g_{0i} \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2$$

Consideremos una partícula en reposo instantáneo en S ($u^i = 0$), entonces será

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(c g_{0i} \frac{dt}{d\tau} \right) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(\left(c \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} + \gamma_i \gamma_j \frac{d^2 x^j}{dt^2} \right) \right)$$

$$\frac{d^2 x^j}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2 x^j}{dt^2} = \frac{1}{g_{00}} \frac{d^2 x^j}{dt^2}$$

y la ecuación de la geodésica toma la expresión

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \left(c \sqrt{g_{00}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} + \gamma_i \gamma_j \frac{d^2 x^j}{dt^2} \right) = \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

Si se define la aceleración instantánea como

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{ij} \frac{d^2 x^j}{d\tau^2}$$

La anterior ecuación se reduce a la ecuación dinámica de Möller

$$a_i = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} - c \sqrt{g_{00}} \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}$$

En caso de potenciales estacionarios que no dependen del tiempo

$$a_i = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = -\frac{\partial \phi_c}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\omega^2}{2} r^2 \right)$$

Por tanto, la aceleración instantánea de una partícula en reposo instantáneo en el sistema S giratorio estacionario, es igual al gradiente del potencial escalar.

Las anteriores ecuaciones admiten también una formulación lagrangiana y hamiltoniana en coordenadas espaciales, puesto que una partícula libre sigue la trayectoria de la curvas geodésicas definidas por

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds^* = \int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}^* \frac{dq^\alpha}{dt^*} \frac{dq^\beta}{dt^*}} dt^* = \delta \int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} c \frac{d\tau}{dt^*} dt^* = 0$$

siendo

$$ds^{*2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2 \right) c^2 dt^{*2} - \left(dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} d\varphi^2 + dz^2 \right) = g_{\alpha\beta}^* dq^\alpha dq^\beta$$

donde los potenciales vectores son nulos.

En general para un tensor métrico $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$, siempre se puede encontrar una transformación $x^{*\mu} = x^{*\mu}(x^\mu)$ a un marco de referencia S^* , en el que el tensor métrico transformado $g_{\alpha\beta}^*$ las componentes $g_{0i}^* = 0$ se anulen, y por tanto, los potenciales vectores sean nulos.

Se puede definir la lagrangiana de la partícula como

$$L_m^*(q^i, \dot{q}^i, t) = -m_0 c^2 \frac{d\tau}{dt^*} = -m_0 c^2 \sqrt{g_{00}^* - \gamma_{ij}^* \dot{q}^i \dot{q}^j / c^2}$$

siendo

$$\gamma_{ij}^* = \frac{\partial x_0^k}{\partial q^i} \frac{\partial x_0^k}{\partial q^j}$$

$$\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$$

$$\dot{q} = \frac{dl_0^*}{dt} = \sqrt{\gamma_{ij}^* \dot{q}^i \dot{q}^j}$$

y la componente temporal del tensor métrico

$$g_{00}^* = 1 + \frac{2\phi_g}{c^2} = 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos definen la trayectoria de la partícula libre

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_m^*}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L_m^*}{\partial q^i} = 0$$

Se define el momento canónico como

$$p_i = \frac{\partial L_m^*}{\partial \dot{q}^i} = \frac{m_0 \gamma_{ij} \dot{q}^j}{\sqrt{g_{00} - u^2/c^2}} = m \dot{q}_i$$

donde $\dot{q}_i$ es la velocidad covariante, que se obtiene de la velocidad contravariante bajando el índice mediante el tensor métrico espacial γ_{ij}

$$\dot{q}_i = \gamma_{ij} \dot{q}^j$$

Vemos que la masa m es una función de los potenciales y de la velocidad

$$m = \frac{m_0}{g_{00}^* - u^2/c^2} = \frac{m_0}{1 + 2\phi_g^*/c^2 - u^2/c^2} = \frac{m_0}{1 - \frac{\omega^2}{c^2} r^2 - \frac{u^2}{c^2}}$$

y se reduce la masa relativista de la relatividad restringida cuando los potenciales se anulan. Además

$$\frac{\partial L_m^*}{\partial q^i} = \frac{m}{2} \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k$$

A partir del tensor métrico, se puede construir de igual forma los símbolos de Christoffel

$$[ij, k]^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{ik}^*}{\partial q^j} + \frac{\partial \gamma_{jk}^*}{\partial q^i} - \frac{\partial \gamma_{ij}^*}{\partial q^k} \right)$$

$$\Gamma_{ij}^{*l} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{ik}^*}{\partial q^j} + \frac{\partial \gamma_{jk}^*}{\partial q^i} - \frac{\partial \gamma_{ij}^*}{\partial q^k} \right) \gamma^{*lk}$$

y una derivada covariante espacial

$$d_e A^i(q^k) \stackrel{\text{def}}{=} A^i(q^k + dq^k) - A^i(q^k) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial q^l} + \Gamma_{kl}^{*i} A^k \right) dq^l \stackrel{\text{def}}{=} A^i{}_{;l} dq^l$$

$$d_e A_i(q^k) \stackrel{\text{def}}{=} A_i(q^k + dq^k) - A_i(q^k) = \left(\frac{\partial A_i}{\partial q^l} - [kl, i]^* A^k \right) dq^l \stackrel{\text{def}}{=} p_{i;l} dq^l$$

siendo

$$p_i = \gamma_{ik} p^k$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange adoptan entonces la expresión

$$\frac{d_e p_i}{dt^*} = -\frac{mc^2}{2} \frac{\partial g_{00}^*}{\partial q^i} = -m \frac{\partial \phi_c}{\partial q^i}$$

En el caso de campo débil, la anterior puede aproximarse por

$$\frac{d_e p_i}{dt} = -\frac{\partial \phi_g}{\partial q^i} - c \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} + c \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial q^i} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial q^k} \right) q^k$$

donde el primer término es análogo a la fuerza centrífuga, y el tercero a la fuerza de Coriolis.

Para el movimiento en un plano, si solo se desea determinar la ecuación de la trayectoria de forma paramétrica, y no como función de tiempo, el anterior análisis se simplifica, siendo entonces el elemento métrico

$$dl^2 = \gamma_{ij} dq^i dq^j = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} d\varphi^2$$

y las curvas geodésicas vienen determinadas por

$$\frac{d}{dl} \left(\gamma_{ij} \frac{dq^j}{dl} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial q^i} \frac{dx^k}{dl} \frac{dx^l}{dl}$$

$$\gamma_{kl} \frac{dx^k}{dl} \frac{dx^l}{dl} = 1$$

siendo ahora $(q^i) = (q^1, q^2) = (r, \varphi)$.

Para $i = \varphi$, se obtiene

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2 / c^2} \frac{d\varphi}{dl} \right) = 0$$

lo que implica que

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{a(1 - \omega^2 r^2 / c^2)}{r^2}$$

donde a es una constante.

Para $i = r$ se tiene

$$\frac{d^2 r}{dl^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dl} \right)^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \right) = \frac{a(1 - \omega^2 r^2/c^2)}{2r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \right)$$

y la condición auxiliar toma la forma

$$1 = \left(\frac{dr}{dl} \right)^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2/c^2} \left(\frac{d\varphi}{dl} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dl} \right)^2 + \frac{a^2(1 - \omega^2 r^2/c^2)}{r^2}$$

Eliminando dl se obtiene la ecuación de la trayectoria

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dl}}{\frac{d\varphi}{dl}} = \pm r^2 \frac{\sqrt{1 - a^2/r^2 + a^2 \omega^2/c^2}}{a(1 - \omega^2 r^2/c^2)}$$

Ecuaciones de Maxwell en sistema no inerciales

En un sistema no inercial definido por una métrica $g_{\alpha\beta}(x)$, las ecuaciones de Maxwell adoptan una forma similar al espacio de Minkowski, excepto que la derivada normal debe ser sustituida por la derivada covariante, lo que garantiza que las ecuaciones se transformen de una forma tensorial covariante, y se cumplan los principios de la covarianza y de equivalencia, por los que ningún sistema se debe distinguir en la representación de la leyes físicas fundamentales.

Las ecuaciones dinámicas de campo de Maxwell vienen dadas por

$$\mathcal{F}_{;\alpha}^{\alpha\beta} = \frac{j^\beta}{c\epsilon_0}$$

siendo $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ el tensor electromagnético definido en función de los potenciales

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} \quad \text{y}$$

$$j^\beta = \rho_0 u^\beta = \rho_0 dx^\alpha/d\tau$$

donde ρ_0 es la densidad de carga medida en un marco local en reposo.

Las ecuaciones cinemáticas de Maxwell venían dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0$$

o es su forma dual equivalente

$$\mathcal{F}_{;\alpha}^{*\alpha\beta} = 0$$

siendo $\mathcal{F}^{*\alpha\beta}$ el tensor dual

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}^{\mu\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\sigma} \sqrt{|g|} \mathcal{F}^{\mu\sigma}$$

La ecuación de continuidad de la carga, como ya vimos está incluida de forma implícita en las ecuaciones dinámicas, y toma la expresión de anulación de la derivada covariante de la corriente

$$\mathcal{J}_{;\alpha}^{\alpha} = 0$$

Debe tenerse en cuenta que el principio de la covarianza se aplica para cualquier espacio de Riemann con una métrica $g_{\alpha\beta}(x)$, y por tanto también a sistemas que pueden estar acelerados, que es una ley comprobada experimentalmente.

Las anteriores ecuaciones en un marco local en reposo con una métrica de Minkowski, se reducen a las ecuaciones de la relatividad restringida.

Como $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico, las ecuaciones dinámicas se pueden escribir también como

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\beta} \left(\mathcal{F}^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} \right) = \frac{\mathcal{J}^{\alpha}}{c\epsilon_0}$$

La ecuación de la conservación de la carga, por el teorema de Gauss, adopta la expresión

$$0 = \int_{\Omega} \mathcal{J}_{;\alpha}^{\alpha} \sqrt{|g|} d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{J}^{\alpha} \sqrt{|g|} d\Sigma_{\alpha} = \int_{V_{\infty}} \mathcal{J}^0 \sqrt{|g|} dV \Big|_{t_1}^{t_2}$$

y por tanto, la carga total Q es una constante en el tiempo

$$Q = \int_{V_{\infty}} \mathcal{J}^0 \sqrt{|g|} dV = \int_{V_{\infty}} \mathcal{J}^0 \sqrt{g_{00}} \sqrt{|\gamma|} dV = \int_{V_{\infty}} \mathcal{J}^0 \sqrt{1 + 2\phi_c/c^2} \sqrt{\gamma} dV$$

Se define al elemento de volumen espacial $d\mathcal{V}$ como

$$d\mathcal{V} = \sqrt{|\gamma|} dV = \sqrt{|\gamma|} dx^1 dx^2 dx^3$$

que es independiente del sistema de coordenadas.

Por ello, la carga en un elemento de materia es independiente del sistema de coordenadas, si se define como

$$\rho dV = \rho_0 dV_0$$

La ecuación de continuidad local de la carga, se puede también describir en función del tensor métrico espacial en la forma

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (u^i \sqrt{|\gamma|}) + \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \sqrt{|\gamma|}) = 0$$

El vector cuadrivelocidad viene ahora dado por

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (\Gamma c, \Gamma \vec{u})$$

siendo

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{(\sqrt{g_{00}} - \gamma_j v^j / c)^2 - \frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{(\sqrt{1 + 2\phi/c^2} - \gamma_j v^j / c)^2 - u^2/c^2}$$

El cuadrivector densidad de corriente, será entonces

$$J^\beta = \rho_0 (\Gamma c, \Gamma \vec{u})$$

Si se desea operar solo en el espacio tridimensional empleando el tensor métrico γ_{ij} , se puede definir de igual forma el tensor constante covariante totalmente antisimétrico de orden tres

$$e_{ijk} = \sqrt{|\gamma|} \varepsilon_{ijk}$$

Empleando el tensor métrico γ_{ij} para la subida y bajada de índices, será

$$e^{ijk} = \gamma^{il} \gamma^{jm} \gamma^{kn} e_{lmn} = \sqrt{|\gamma|} \gamma^{il} \gamma^{jm} \gamma^{kn} \varepsilon_{lmn} = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \varepsilon_{ijk}$$

siendo γ^{ij} la matriz inversa de γ_{ij} .

Las componentes duales covariantes de un tensor antisimétrico, se pueden definir de igual forma

$$F_i^* = \frac{1}{2} e_{ijk} F^{jk} = \frac{1}{2} \sqrt{|\gamma|} \varepsilon_{ijk} F^{jk}$$

$$F^{*i} = \frac{1}{2} e^{ijk} F_{jk} = \frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}} \varepsilon^{ijk} F_{jk}$$

Los significados del campo electromagnético

donde $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$ es el tensor antisimétrico de Levi-Civita de orden tres

Una propiedad es que la divergencia y el rotacional de un tensor antisimétrico son duales

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (F^{*i} \sqrt{|\gamma|}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3! \sqrt{\gamma}} \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (F^{ij} \sqrt{|\gamma|}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}} \varepsilon^{jkl} \frac{\partial F_l^*}{\partial x^k}$$

En el marco de referencia S^* , las ecuaciones de Maxwell en el vacío adoptan una forma similar a las ecuaciones en un sistema inercial si se define

$$cB^{ij} = \frac{\mu_0 \mathcal{H}^{ij}}{\sqrt{g_{00}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{ij} \rightarrow cB_{ij} = \frac{\mu_0 \mathcal{H}_{ij}}{\sqrt{g_{00}}} = \gamma_{ik} \gamma_{jl} cB^{kl} = \mathcal{F}_{ij}$$

$$\frac{D^i}{\varepsilon_0 \sqrt{g_{00}}} = \frac{\mathcal{E}^i}{g_{00}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{0i} \rightarrow \mathcal{F}_{i0} = g_{ij}^* g_{0k}^* \mathcal{F}^{jk} = \gamma_{ij} g_{00}^* \mathcal{F}^{0j} = \gamma_{ij} E^j \stackrel{\text{def}}{=} E_j = \frac{1}{\varepsilon_0} D_j \sqrt{g_{00}^*}$$

y sus duales

$$B^{*i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} B_{jk} = \frac{1}{2\sqrt{|\gamma^*|}} \varepsilon^{ijk} B_{jk}$$

$$H_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} H^{jk} = \frac{1}{2} \sqrt{|\gamma^*|} \varepsilon_{ijk} H^{jk}$$

Con esta notación, las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma dada por Möller para sistemas no inerciales

Ecuaciones cinemáticas o covariantes de Maxwell

$$\frac{\partial B_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial B_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{|\gamma^*|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (B^{*i} \sqrt{|\gamma^*|}) = 0$$

$$\frac{\partial E_j}{\partial x^i} - \frac{\partial E_i}{\partial x^j} = -\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{|\gamma^*|}} \varepsilon^{jkl} \frac{\partial E_l}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial t} (B^{*i})$$

Ecuaciones dinámicas o contravariantes de Maxwell adoptan la forma

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} (D^i \sqrt{|\gamma|}) = \rho$$

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (H^{ij} \sqrt{|\gamma|}) = \rho u^i + \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} \frac{\partial}{\partial t} (D^i \sqrt{|\gamma|}) \quad \text{o} \quad \varepsilon^{ijk} \frac{\partial H_k^*}{\partial x^j} = \rho u^i + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (D^i \sqrt{|\gamma|})$$

Obsérvese que las ecuaciones cinemáticas vienen expresadas en función de las componentes covariantes del tensor electromagnético, mientras que las ecuaciones dinámicas vienen representadas en función de sus componentes contravariantes.

Esta distinción entre componentes covariantes y contravariantes de las ecuaciones de Maxwell en los sistemas no inerciales, es una diferencia respecto a la formulación covariante de la relatividad restringida en que ambas componentes son equivalentes.

El cuadvivector de la fuerza electromagnética vendrá definido por la derivada covariante del momento

$$\mathcal{F}_\alpha = \frac{d_c \mathcal{P}_\alpha}{d\tau} = m_0 g_{\alpha\beta} \frac{d_c u^\beta}{d\tau} = \frac{1}{c} \mathcal{F}_{\alpha\beta} J^\beta = \frac{\rho_0}{c} \mathcal{F}_{\alpha\beta} u^\beta$$

y la ecuaciones de la trayectoria de movimiento y de energía serán entonces

$$\begin{aligned} \frac{d_c \mathcal{P}_i}{d\tau} &= \mathcal{F}_i = \rho_0 \Gamma \left(-E_i u^i, E_j + \frac{1}{c} B_{jk} u^k \right) \\ \frac{d_c \mathcal{P}_0}{d\tau} &= \mathcal{F}_0 = -\rho_0 \Gamma E_i u^i \end{aligned}$$

Debe entenderse que $\mathcal{F}_\alpha$ es el campo que actúa sobre la partícula de forma que se desvía respecto a su trayectoria libre que sigue la geodésica definida por

$$\frac{d_c \mathcal{P}_\alpha}{d\tau} = 0$$

La fuerza está definida por las componentes covariantes del tensor electromagnético.

Ello es debido a que en un espacio métrico de Riemann general, $u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta = dx^\alpha/d\tau$ ya no es igual a $dx_\alpha/d\tau$.

Debe mantenerse esta distinción entre ecuaciones covariantes y contravariantes, ya que en un espacio métrico pueden representar ecuaciones físicas distintas. No mantener esta distinción ha provocado mucha confusión en la literatura, y en la interpretación de fenómenos físico como el efecto Wilson, como veremos más adelante.

Cuando los potenciales vectoriales dinámicos no son nulos, hay que ser cuidadoso en la definición de las variables del campo electromagnético como observables mediante el campo de fuerza que crean sobre una carga de prueba.

En el caso de un marco de referencia en el que los potenciales vectores dinámicos no se anulen, es conveniente considerar las componentes covariantes como la magnitud fundamental, y definir

$$\begin{aligned}\frac{E^i}{g_{00}^*} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{0i} & cB^i &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathcal{F}^{jk} \\ \frac{\mathcal{E}^i}{g_{00}^*} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{0i} & c\mathcal{B}^i &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} e^{ijk} \mathcal{F}_{jk} \\ D^i &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|g|} \varepsilon_0 E^i & H^i &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|g|} \mu_0 B^i \\ \rho_g &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|g|} \rho & J_g^i &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|g|} J^i\end{aligned}$$

Las ecuaciones cinemáticas covariantes de Maxwell en el vacío, adoptan entonces la forma dada por Crater

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}} = -\frac{d\vec{\mathcal{B}}}{dt}$$

y las ecuaciones dinámicas contravariantes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho_g$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{H}} = \vec{J}_g + \frac{d\vec{\mathcal{D}}}{dt}$$

Vemos que $\sqrt{|g|}$ desempeña el papel de una permitividad y susceptibilidad del vacío.

Ecuaciones de Maxwell en un sistema en rotación. Efecto Wilson

De igual forma que en el capítulo de teorías en sistemas móviles, definen los tensores electromagnéticos en la materia $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$ en el sistema S giratorio como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{H}_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & cD^x & cD^y & cD^z \\ -cD^x & 0 & -H^z & H^y \\ -cD^y & H^z & 0 & -H^x \\ -cD^z & -H^y & H^x & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & cP_x & cP_y & cP_z \\ -cP_x & 0 & -M_z & M_y \\ -cP_y & M_z & 0 & -M_x \\ -cP_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Maxwell serán entonces

$$g^{\alpha\mu} g^{\beta\sigma} \mathcal{H}_{\mu\sigma;\alpha} = \mathcal{J}^\beta$$

$$\varepsilon^{\beta\mu\sigma\nu} \mathcal{F}_{\mu\sigma;\nu} = 0$$

La primera ecuación dinámica también se puede escribir como

$$g^{\alpha\mu} g^{\beta\sigma} \mathcal{F}_{\mu\sigma;\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} (\mathcal{J}^\beta + \mathcal{J}_M^\beta) = \frac{1}{c\epsilon_0} \mathcal{J}^\beta + \frac{1}{c\epsilon_0} \mathcal{M}_{;\alpha}^{\alpha\beta}$$

siendo $\vec{\mathcal{J}}_M = (c\rho_P, \vec{\mathcal{J}}_M + \vec{\mathcal{J}}_P)$.

Las relaciones de constitución en S vienen definidas por

$$\mathcal{H}_{\alpha 0} = c\varepsilon \mathcal{F}_{\alpha 0}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}_{\alpha\beta} g_{\sigma 0} = \frac{\mu}{c} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \mathcal{F}_{\alpha\beta} g_{\sigma 0}$$

Teniendo en cuenta que

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - u^2/c^2 & -u^x & -u^y & 0 \\ -u^x & -1 & 0 & 0 \\ -u^y & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -u^x & -u^y & 0 \\ -u^x & -1 + (u^x)^2 & 0 & 0 \\ -u^y & 0 & -1 + (u^y)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo además

$$|g_{\alpha\beta}| = |g^{\alpha\beta}| = 1$$

y

$$u^x = -\omega y$$

$$u^y = \omega x$$

es la velocidad en el punto (x, y) del sistema giratorio S respecto al sistema fijo S_0 .

Utilizando el tensor métrico, se obtiene en forma vectorial las ecuaciones de Maxwell en el sistema S giratorio

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{H})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{D} - \vec{u} \wedge \vec{u} \wedge \vec{H})$$

Las relaciones de constitución en S toman la forma

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} + \frac{1}{\mu(1 - v^2/c^2)} \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1 \right) \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{E}$$

Consideremos ahora un observador en un sistema en reposo S_0 , que ve como el sistema S que rota alrededor del eje z con velocidad angular constante ω .

En cada punto $\vec{x}$ del sistema giratorio S , tomaremos definimos ahora un sistema S_I respecto al cual dicho punto está en reposo instantáneo.

El tensor electromagnético al pasar del sistema S_I al S vendrá dada por la transformación de Lorentz

$$L_{\beta_I}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x_I^{\beta}} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma^2 u^x & \gamma^2 u^y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

El tensor electromagnético cambiara de acuerdo con la transformación

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \mathcal{L}_{\mu_I}^{\alpha} \mathcal{L}_{\sigma_I}^{\beta} \mathcal{F}_I^{\mu_I\sigma_I}$$

$$\mathcal{F}_I^{\mu_I\sigma_I} = \mathcal{L}_{\alpha}^{\mu_I} \mathcal{L}_{\beta}^{\sigma_I} \mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

donde $\mathcal{L}_{\alpha}^{\mu_I}$ es la matriz inversa de $\mathcal{L}_{\mu_I}^{\alpha}$

El campo electromagnético del sistema S al sistema S_I se transformara como

$$\vec{E}_I = \gamma \vec{E}$$

$$\vec{B}_I = \vec{B} - \gamma^2 \vec{u} \wedge \vec{E}$$

El paso del sistema S_I al S se realiza mediante una transformación normal de Lorentz, considerando que un punto (x, y) en S_I se está moviendo respecto a sistema S con una velocidad relativa ($u^x = -\omega y, u^y = \omega x$)

$$\mathcal{L}_{\beta_0}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u^x/c & -\gamma u^y/c & 0 \\ -\gamma u^x/c & 1 + (\gamma - 1) u^x u^x / c^2 & (\gamma - 1) u^x u^y / c^2 & 0 \\ -\gamma u^y/c & (\gamma - 1) u^x u^y / c^2 & 1 + (\gamma - 1) u^y u^y / c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El campo electromagnético del sistema S_I al sistema S_0 se transformara de acuerdo con las ecuaciones que ya vimos en el capítulo de teorías de los sistemas móviles

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \gamma(\vec{E}_0 + \vec{u} \wedge \vec{B}_0) - \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma - 1)}(\vec{u} \cdot \vec{E}_0)\vec{u} \\ c\vec{B} &= \gamma(c\vec{B}_0 - \vec{u} \wedge \vec{E}/c) - \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma - 1)}(\vec{u} \cdot c\vec{B}_0)\vec{u}\end{aligned}$$

De igual forma que en el capítulo de teorías en sistemas móviles, se pueden definir los tensores electromagnéticos en la materia $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{M}^{\alpha\beta}$, que se transformarán de la misma manera que el tensor electromagnético $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$.

Eliminando entre las anteriores ecuaciones el campo en el sistema S_I , se obtiene que el campo electromagnético en sistema el sistema rotatorio S y el sistema fijo S_0 están relacionados de acuerdo con las ecuaciones

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{u} \wedge \vec{B}_0 - \frac{\gamma}{c^2(\gamma + 1)}(\vec{u} \cdot \vec{E}_0)\vec{u} \\ c\vec{B} &= \gamma(c\vec{B}_0 - \vec{u} \wedge \vec{E}_0) + \frac{\gamma^2}{c}\vec{u} \wedge (\vec{E}_0 + \vec{u} \wedge \vec{B}_0) - \frac{\gamma^2}{c(\gamma + 1)}\vec{u} \cdot \vec{B}_0\vec{u} \\ c\vec{D} &= c\vec{D}_0 + \frac{1}{c}\vec{u} \wedge \vec{H}_0 - \frac{\gamma^2}{c(\gamma + 1)}(\vec{u} \cdot \vec{D}_0)\vec{u} \\ \vec{H} &= \gamma(\vec{H}_0 - \vec{u} \wedge \vec{D}_0) + \frac{\gamma^2}{c^2}\vec{u} \wedge (c\vec{D}_0 + \vec{u} \wedge \vec{H}_0) - \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma + 1)}\vec{u} \cdot \vec{H}_0\vec{u}\end{aligned}$$

Las relaciones de constitución en S : $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, se transforman localmente en el sistema S_0 , de acuerdo con las mismas relaciones de constitución de Minkowski que obtuvimos en el capítulo de teorías de los sistemas móviles para bajas velocidades

$$\begin{aligned}\vec{D}_0 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \frac{u^2}{c^2}\right)} \left(\epsilon \vec{E}_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \left(\frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{H}_0 - \frac{\epsilon}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{E}_0 \vec{u}\right) \right) \\ \vec{B}_0 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \frac{u^2}{c^2}\right)} \left(\mu \vec{H}_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \left(\frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{E}_0 - \frac{\mu}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{H}_0 \vec{u}\right) \right)\end{aligned}$$

Las densidades de polarización y magnetización en S_0 será entonces

$$\begin{aligned}\vec{P}_0 &= \gamma(\vec{P} + \frac{1}{c^2}\vec{u} \wedge \vec{M}) \approx (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} - 1\right) \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{B} \\ \vec{M}_0 &= \gamma(\vec{M} - \vec{u} \wedge \vec{P}) \approx \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right)\vec{B} + \frac{1}{\mu}(\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0) \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{E}\end{aligned}$$

Los significados del campo electromagnético

Las anteriores ecuaciones, pueden resolverse para obtenerse unas relaciones de constitución en la forma

$$\vec{D}_0 = \vec{D}_0(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{u})$$

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_0(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{u})$$

que toman la expresión explícita

$$\vec{D}_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \left(\frac{1}{\mu c^2} \left(\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} - \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{E}_0 + \frac{1}{\mu c^2} \left(\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} - 1 \right) (\vec{u} \wedge \vec{B}_0 - \frac{1}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{E}_0 \vec{u}) \right)$$

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \left(\frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu c^2} \left(\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} - 1 \right) (\vec{u} \wedge \vec{E}_0 + \vec{u} \cdot \vec{B}_0 \vec{u}) \right)$$

Consideramos ahora un cilindro hueco de un material con constantes ϵ, μ , y radios r_1, r_2 que rota sobre su eje con velocidad angular ω en un campo magnético externo $\vec{B}_e$ constante en la dirección del eje. Las ecuaciones de Maxwell en el sistema fijo S_0 , serán entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_0 = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_0 \equiv 0$$

con la condiciones de contorno fuera del cilindro

$$\vec{E}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \vec{B}_0 = \vec{B}_e \quad r < r_1 \vee r > r_2$$

Introduciendo en la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_0 = 0$, la anterior relación de constitución $\vec{D}_0(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{u})$, se obtiene que dentro del cilindro, el campo eléctrico será

$$\vec{E}_0 + \vec{u} \wedge \vec{B}_0 - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{E}_0 \vec{u} = 0 \quad r_1 < r < r_2$$

De igual forma, introduciendo en la ecuación $\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_0 = 0$, la anterior relación de constitución $\vec{H}_0(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{u})$, se obtiene que dentro del cilindro, el campo eléctrico es

$$\vec{u} \wedge \vec{B}_0 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{u^2}{c^2}\right)} \left(\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \vec{u} \wedge \vec{B}_e + \left(1 - \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}\right) \vec{u} \wedge \vec{u} \wedge \vec{E}_0 \right) \quad r_1 < r < r_2$$

Introduciendo esta última ecuación en la penúltima, se obtiene que el campo eléctrico en interior del cilindro es radial e igual

$$E_0 = \left(1 - \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}\right) \omega r B_e$$

Este campo radial crea una diferencia de potencial ΔV entre las caras del cilindro

$$\Delta V = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0} \right| (r_2^2 - r_1^2) \omega B_e$$

lo que se conoce como el efecto Wilson-Wilson.

Si hiciéramos una transformación de Lorentz directamente desde un punto S_0 al sistema S con velocidad $\vec{u}$ de acuerdo con la relatividad restringida, obtendríamos que

$$E_0 = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \omega r B_e$$

lo que está en desacuerdo con los resultados obtenidos a partir de la relatividad general para sistemas no inerciales, que es la que concuerda con los resultados experimentales.

Para obtener los anteriores resultados, ha sido fundamental realizar las transformaciones pasando por el sistema inercial S_1 de reposo instantáneo, asumiendo el principio de la cronometría y de equivalencia, lo que nos ha llevado a una confirmación experimental del principio de equivalencia de la relatividad general para un sistema no inercial en rotación.

631

Fotón masivo

Si a la lagrangiana del campo electromagnético libre se le añade un término proporcional al cuadrado de los potenciales vectores, se obtiene la lagrangiana de Proca

$$\mathcal{L}_e = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} + \epsilon_0 c^2 \kappa^2 \mathcal{A}^\beta \mathcal{A}_\beta$$

Las ecuaciones de Maxwell vendrán dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes de la variación respecto a los potenciales $\mathcal{A}^\alpha$, que considerando incluido el término de interacción nos da como resultado

$$\mathcal{F}_{;\alpha}^{\alpha\beta} + c\kappa^2 \mathcal{A}^\beta = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\epsilon_0}$$

Si se desprecia el efecto de la gravedad, D_α se convierte en la derivada normal y, si se supone que no sólo existe una carga puntual q estática situada en el origen, la anterior ecuación se reduce a

$$\nabla^2 \phi + \kappa^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{x})$$

que integrada nos da

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

Es decir, la ley de Coulomb decae exponencialmente.

Si consideramos la variación en el tiempo, la ecuación de ondas para el potencial en el vacío será

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}^\beta}{\partial x^\alpha \partial x_\alpha} + \kappa^2 \mathcal{A}^\beta = 0$$

que en el caso de una onda plana nos lleva a que se debe verificar

$$\omega^2 = c^2 k^2 + c^2 \kappa^2$$

Por la ecuación relativista que liga la energía con el momento, lo anterior nos indica que, si la energía es $\hbar\omega$ y el momento $\hbar k$, la masa asociada debe ser $\hbar\kappa$.

El término de Proca, daría también lugar a ondas electromagnéticas longitudinales además de las transversales.

Las ecuaciones del magnetismo también cambiarían, y para un dipolo $\vec{m}$ magnético situado en el origen sería

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{B}(\vec{x}) = (3\vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{m}) - \vec{m}) \left(1 + \kappa|\vec{x}| + \frac{(\kappa|\vec{x}|)^2}{3} \right) \frac{e^{-\kappa|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^3} - \frac{2}{3} \kappa^2 \vec{m} \frac{e^{-\kappa|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$$

por lo el campo magnético decae también exponencialmente.

Esto modificaría, por ejemplo, el comportamiento del campo magnético de la tierra, supuesto que tiene también una distribución dipolar.

Con la precisión de las medidas efectuadas por satélite dan actualmente un límite muy bajo para dicha masa del fotón si existiese.

Si el fotón hubiera tenido una masa apreciable, todo el electromagnetismo sería muy diferente y la materia habría colapsado por el corto alcance de las fuerzas de Coulomb y del magnetismo.

Sin embargo, se ha demostrado que toda la electrodinámica se desarrolla a partir de un sistema de paridad covariante de partículas cargadas de espín $1/2$, imponiendo una simetría de fase global interna $U(1)$ que sea también local (principio gauge).

Geometrización del campo electromagnético

En las teorías clásicas del campo electromagnético, el concepto de fuerza (fuerza electrodinámica de Lorentz) se sigue manteniendo, por lo que el electromagnetismo tiene un carácter físico diferente de la gravitación. La interacción de la materia con el campo en la teoría de Maxwell sigue manteniendo un carácter Newtoniano.

Fueron Kaluza y Klein, quienes plantearon la posibilidad de eliminar el concepto de fuerza, sugiriendo en analogía con la gravitación la posibilidad de que el potencial electromagnético A_α modificara la geometría del espacio-tiempo. Para ello postularon la existencia de una adicional cuarta dimensión de tipo espacial, a través de la cual se manifiesta el electromagnetismo. Sugirieron que el tensor métrico se debe modificar en presencia de campos electromagnéticos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{4\alpha} &= \tilde{g}_{\alpha 4} = \tilde{g}_{44} A_\alpha \\ \tilde{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + \tilde{g}_{44} A_\alpha A_\beta\end{aligned}$$

donde $g_{\alpha\beta}$ es el tensor métrico del espacio-tiempo ordinario y $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ es el tensor métrico extendido a una cuarta dimensión espacial adicional, a través de la que se manifiesta el campo electromagnético.

En analogía con la teoría general de la relatividad, Kaluza y Klein postularon que para el nuevo espacio ampliado, la estructura de la función de la acción es la misma que la de la relatividad general, y que adopta la forma

$$S = \frac{c}{16\pi\tilde{G}} \int d^5x \sqrt{\tilde{g}} R$$

donde $\tilde{R}$ es el radio de curvatura de Ricci para el nuevo espacio ampliado, $\tilde{G}$ es una nueva constante que definiremos más adelante y $\tilde{g}$ es el determinante de la métrica habitual.

Considerando que la nueva dimensión es de tipo espacial, entonces $\tilde{g}_{44}$ debe ser positivo y $\tilde{g}$ es negativo.

Se supone además que $\tilde{g}_{44}$ es una constante y que $g_{\alpha\beta}$ y A_α no dependen de la coordenada de la nueva dimensión x_4 .

También Kaluza y Klein asumieron que la nueva dimensión tiene una extensión finita, de forma que se enrolla sobre sí misma de forma cilíndrica con un radio r_4 cuya magnitud es muy pequeña e inobservable.

Con estas suposiciones, se demuestra que la anterior expresión para la acción se reduce a la suma de las acciones de los campos libres gravitatorio y electromagnético ya definida en secciones anteriores

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \frac{\epsilon_0}{4\delta^2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right)$$

donde $F_{\alpha\beta} = \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha - \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta$ es el tensor electromagnético de Maxwell.

Existen además las relaciones

$$G = \frac{\tilde{G}}{2\pi r_4 \tilde{g}_{44}} \quad y$$

$$\delta^2 = \frac{8\tilde{G}}{r_4 |\tilde{g}_{44}|^{\frac{3}{2}}}$$

El inconveniente de esta teoría es que no predice ningún fenómeno físico nuevo y es inverificable experimentalmente, por lo que siguiendo el criterio de falsación de Popper no debería ser considerado como rigurosa científicamente, por muy atractiva que sea conceptualmente. Además, una cuarta dimensión espacial oculta parece resucitar algunos aspectos de las antiguas teorías del éter.

Wheeler encontró una solución particular no singular de las ecuaciones de Einstein acopladas con el campo electromagnético, que le permitió determinar unos potenciales electromagnéticos y un tensor métrico compatibles con ellas

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} = \frac{16\pi}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta(L_e \sqrt{|g|})}{\delta g^{\alpha\beta}}$$

Interpretó sus resultados asimilando la masa gravitacional a una perturbación espacial que procede de la energía almacenada del campo electromagnético, y que se concentra con una forma toroidal estable por periodos de tiempo suficientemente largos comparados con los tiempos característicos del sistema. Wheeler llamó geones a estas acumulaciones de energía electromagnética que poseen una masa inercial y una posición localizada en el espacio.

Se han formulado otras muchas teorías geométricas del espacio –casi todas inverificables experimentalmente– para representar las propiedades del campo electromagnético de las partículas cargadas. Sin embargo, no existe todavía ninguna teoría cuántica satisfactoria sobre la masa inercial y sus valores fijos para las partículas elementales. La cuantización del campo gravitacional lleva a los gravitones que son bosones de espín 2, que todavía no se han podido detectar experimentalmente.